応用数理 B プチテスト

樋口さぶろお[1] 配布: 2010-11-16 Wed 更新: Time-stamp: "2011-01-08 Sat 13:22 JST hig"

1

x 軸上を運動する質量 m の物体の位置エネルギーが $U(x)=\frac{1}{2}kx^2$ で与えられる. k は定数. ラグランジアン $L(x,\dot{x})$ を求めよう.

2

質量 m の物体に, 自然長 ℓ, ばね定数 k のばねをとりつけ, 天井からつり下げる. 重力加速度の大きさを g とする.
天井を原点とし, 鉛直下向きの z 軸をとる. ラグランジアンを求めよう.

3

x 軸上を運動する物体のラグランジアンが $L(x,\dot{x})=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}x-x^2$ で与えられる. オイラー-ラグランジュの運動方程式を求めよう.

4

xy 平面を運動する物体のラグランジアンが $L(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta})=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+(r\dot{\theta})^2)-\frac{1}{2}kr^2$ で与えられる. ここで (r,θ) は平面極座標である. 座標 r,θ についてのオイラー-ラグランジュの運動方程式を求めよう. また, 循環座標があれば, 対応する不変量を求めよう.

5

ラグランジアン $L(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta})=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+(r\dot{\theta})^2)+\frac{1}{2}r^2$ を考える. m は質量.

1. r の共役運動量 p_r, θ の共役運動量 p_θ を, $r,\theta,\dot{r},\dot{\theta},m$ で表そう.
2. ハミルトニアン $H(r,\theta,p_r,p_\theta)$ を求めよう.

6

ラグランジアン $L(q,\dot{q})=a\dot{q}^2+bq^2+cq^4$ を考える. a,b,c は定数.

1. q の共役運動量 p を $q,\dot{q},a,b,c$ で表そう.
2. ハミルトニアン $H(q,p)$ を求めよう.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

7

xy 平面上を運動する質量 m の物体を考える．物体は, 平面内の曲線 $x^2+4y^2=1$ 上に拘束され, また, 位置エネルギー $U(x,y)=\frac{1}{2}k(x^2+y^2)$ から定まる力を受けて運動している.

1. ラグランジアン $L(x,y,\lambda,\dot{x},\dot{y})$ を求めよう．λ をラグランジュの未定乗数とする.
2. オイラー-ラグランジュの運動方程式を書こう.

8

xy 平面上を運動する質量 m の物体を考える．物体は, 平面内の曲線 $y=2x$ 上に拘束され, また, 位置エネルギー $U(x,y)=3x$ から定まる力を受けて運動している.

1. ラグランジアン $L(x,y,\lambda,\dot{x},\dot{y})$ を求めよう．λ をラグランジュの未定乗数とする.
2. オイラー-ラグランジュの運動方程式を書こう.
3. オイラー-ラグランジュの運動方程式を解いて x,y の一般解を求めよう.

9

ハミルトニアンが $H(x,p)=ax^2+bx^2p^2+cp^2$ であるとき, ハミルトンの運動方程式を導こう．ただし, x は座標, p は共役運動量, a,b,c は定数である.

10

ハミルトニアンが $H(r,\theta,p_r,p_\theta)=\frac{1}{2m}(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2})-\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{4}r^4$ であるとき, ハミルトンの運動方程式を導こう．ただし, r,θ は座標, p_r,p_θ は対応する共役運動量である.

11

ハミルトニアンが $H(q,p)=\frac{1}{2m}p^2+\frac{1}{2}q^2+\frac{1}{4}q^4$ で与えられるとき, 物理量 $f=q^2p^2$ の時間微分 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ を q,p,m で表そう．ただし, q は座標, p は共役運動量である.

12

ハミルトニアンが $H(x,p)=p^2+2\sqrt{2}px$ で与えられる．正準変換 $(x,p)\to(X,P)$ を $p=\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}P-X)$, $x=\frac{1}{\sqrt{3}}(P+\sqrt{2}X)$ で定める.

1. ハミルトニアンを X,P で書き直そう.
2. X,P についてのハミルトンの運動方程式を導こう.
3. X,P の一般解を求めよう.

応用数理 B プチテスト略解

樋口さぶろお[2] 配布: 2010-11-16 Wed 更新: Time-stamp: "2011-01-08 Sat 13:22 JST hig"

配点　1,3,9,10:5 点, 他 10 点. 計 100 点.

講評　$\dot{x}$ と $\frac{\partial H}{\partial \dot{x}}$ を混同している答案が一定数ありました. ぜんぜん意味違うじゃん. H は x, p の関数だから, そんな偏微分は zero になっちゃうし.

1

$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2.$

2

$L(z, \dot{z}) = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - (-mgz + \frac{1}{2}k(z - \ell)^2).$

3

$m\ddot{x} = \frac{1}{2} - 2x.$

4

$$\begin{aligned} m\ddot{r} =& +mr\dot{\theta}^2 - kr \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr^2\dot{\theta}) =& 0 \end{aligned}$$

θ は循環座標. 角運動量 $mr^2\dot{\theta}$ が対応する不変量.

配点　循環座標, 保存量各 1 点.

講評　循環座標を明示してない答案が多かった.

5

1. $p_r = m\dot{r}$. $p_\theta = mr^2\dot{\theta}$.
2. $H(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}) - \frac{1}{2}r^2.$

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

配点　1 が 4 点, 2 が 6 点.

講評　ありがちなのは $-\frac{1}{2}r^2$ だけど問題通りにやってね.

6

1. $p = 2a\dot{q}$.
2. $H(q,p) = \frac{p^2}{4a} - bq^2 - cq^4$.

配点　1 が 3 点, 2 が 7 点.

7

1. $L(x,y,\dot{x},\dot{y},\lambda) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - \frac{1}{2}k(x^2+y^2) + \lambda(x^2+4y^2-1)$.
2.
$$\begin{aligned} m\ddot{x} =& -kx + 2\lambda x \\ m\ddot{y} =& -ky + 8\lambda y \\ 0 =& x^2 + 4y^2 - 1 \end{aligned}$$

配点　1 が 4 点, 2 が 6 点.

講評　2 で λ についての運動方程式を書いていない人が一定数いました.
　$\lambda(x - \sqrt{1-4y^2})$ っていう未定乗数項は惜しいけど, $x = \mp\sqrt{1-4y^2}$ の一方しか表してないからな〜

8

1. $L(x,y,\lambda,\dot{x},\dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - 3x + \lambda(y-2x)$.
2.
$$\begin{aligned} m\ddot{x} =& -3 - 2\lambda \\ m\ddot{y} =& 0 + \lambda \\ 0 =& y - 2x \end{aligned}$$
3. (1)+2(2) で λ を消去すると $m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x+2y) = -3$. よって $m(x+2y) = -\frac{3}{2}t^2+Ct+D$. これと $y-2x=0$ を連立して, $x = \frac{1}{5m}(-\frac{3}{2}t^2+Ct+D), y = \frac{2}{5m}(-\frac{3}{2}t^2+Ct+D)$

配点　1 が 4 点, 2 が 3 点, 3 が 3 点.

9

$$
\begin{aligned}
\dot{x} =& 2bpx^2 + 2cp \\
\dot{p} =& -2ax - 2bp^2x
\end{aligned}
$$

講評　ハミルトンの運動方程式と言ったときは x, p の 1 階の微分方程式系であり, $\ddot{x}$ に直す必要はない.

10

$$
\begin{aligned}
\dot{r} =& \frac{p_r}{m} \\
\dot{\theta} =& \frac{p_\theta}{mr^2} \\
\dot{p_r} =& r - r^3 + \frac{p_\theta^2}{mr^3} \\
\dot{p_\theta} =& 0
\end{aligned}
$$

11

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q^2p^2) = \frac{2qp^3}{m} - 2q^3p(1+q^2)$.

12

1. $H(X, P) = 2P^2 - X^2$.
2. $\ddot{X} = 4P, \ddot{P} = 2X$.
3. $\ddot{X} = 8X$ より, $X = C_1\mathrm{e}^{\sqrt{8}t} + C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{8}t}$. $P = \frac{1}{4}\dot{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_1\mathrm{e}^{\sqrt{8}t} - C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{8}t})$.

配点　1 が 2 点, 2 が 4 点, 3 が 4 点.

講評　せっかく, $\ddot{X} = 8X$ まで行き着きながら, $X(t) = \cos(2\sqrt{2}t)$ になっちゃう人が一定数いました. $\ddot{X} = 8X$ と $\ddot{X} = -8X$ は大違いでしょ.

http://hig3.net