応用数理 B ファイナルトライアル

樋口さぶろお[1] 配布: 2011-01-25 Tue 更新: Time-stamp: "2011-02-06 Sun 22:46 JST hig"

ファイナルトライアル参加案内

- 指定された用紙に解答しよう.
- 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
- 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

配点　1-4 各 5 点, 5-12 各 10 点.

1

過程不要 z 軸上を運動する質量 m の物体の位置エネルギーが $U(z) = -mgz$ で与えられる. g は定数. ラグランジアン $L(z, \dot{z})$ を求めよう.

2

過程不要 平面上に極座標 (r, θ) をとる. 平面上を運動する質量 m の物体のラグランジアンが $L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r}$ で与えられる. ここで k は定数. オイラー-ラグランジュの運動方程式を求めよう.

3

過程不要 ラグランジアンが $L(x, \dot{x}) = a\dot{x}^2 + bx\dot{x} + cx^2 + dx^4$ であるとき, ハミルトニアンを求めよう. ただし x の共役運動量を p とする. a, b, c, d は定数である.

4

過程不要 質量 m の物体のハミルトニアンが $H(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}) + r^2$ である. ハミルトンの運動方程式を導こう. r, θ は座標, p_r, p_θ はその共役運動量である.

5

固定軸のまわりを運動する剛体を考える. 固定軸のまわりの慣性モーメントを $I = ma^2$, 回転角を θ, 位置エネルギーを $U(\theta) = -3ma\cos\theta$ とする. ここで, m, a は定数.

回転運動のラグランジアン $L(\theta, \dot{\theta})$ を求めよう.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

6

質量 $m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 4$ の 3 個の物体を軽くて曲がらない棒で連結した剛体を考える．この剛体は z 軸を固定軸として回転する．

3 個の物体の位置がそれぞれ, $\boldsymbol{r}_1 = (1, 4, 9), \boldsymbol{r}_2 = (0, 0, 4), \boldsymbol{r}_3 = (0, 1, 0)$ であるとき, z 軸のまわりの慣性モーメントを求めよう．

7

質量 $m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 4$ の 3 個の物体を軽くて曲がらない棒で連結した剛体を考える．この剛体は原点を固定点として回転する．

3 個の物体の位置をそれぞれ, $\boldsymbol{r}_1 = (1, 4, 9), \boldsymbol{r}_2 = (4, 1, 4), \boldsymbol{r}_3 = (1, -1, 3)$ であるとき, 3×3 の慣性テンソルを求めよう．

8

$\boxed{\text{過程不要}}$ふつうの xyz 座標系 (右手系つまり右手の 親指が x, 人差指が y, 中指が z 軸に対応) をとる．

z 軸を固定軸として, xy 平面内で, 時計回りに角速度 ω で回転する, 剛体がある．剛体の, z 軸のまわりの慣性モーメントは I で与えられる．

回転の運動エネルギーと, 角運動量ベクトルをそれぞれ求めよう．

9

ある剛体の慣性テンソルが $I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ で与えられる．3 つの慣性主軸の方向と, その主軸に対応する主慣性モーメント (そのときの慣性モーメントテンソルの対角成分) を求めよう．

10

慣性系に対して一定の角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ で回転する加速度座標系での, 質量 m の物体の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ の満たす運動方程式は,

$$m\frac{\delta^2 \boldsymbol{r}}{\delta t^2}(t) = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{\delta \boldsymbol{r}}{\delta t}(t)$$

である．ここで $\frac{\delta}{\delta t}$ は回転座標系での時間微分, 右辺の第 1 項は外力, 第 2 項は遠心力, 第 3 項はコリオリの力である．

$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, 3)$ の回転座標系で, $\boldsymbol{r}(t) = (2t, 0, t), \frac{\delta \boldsymbol{r}}{\delta t}(t) = (2, 0, 1)$ に従って運動する物体が, 時刻 t に受ける遠心力とコリオリの力を求めよう．

11

2000kg のエレベータに, 10kg のエンペラーペンギンが乗っている.

時刻 $t=0$ から $t=\pi$ [s] までの間に, エレベータは位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)=(2,0,-10\cos t)$ [m] に従って 20 だけ上昇した. その間にエンペラーペンギンは, 体重が重くなったり軽くなったりしたかのように感じた. これは慣性力を受けたことが原因である.

時刻 t においてエンペラーペンギンが受ける慣性力を求めよう.

12

外力をうけない剛体を考える. 剛体に固定された, 慣性主軸に平行な座標を x_1, x_2, x_3 とする. 主慣性モーメントを $I_1=3, I_2=2, I_3=3$ とする.

時刻 $t=0$ での角速度ベクトルが, $\boldsymbol{\omega}(0)=(2,4,0)$ で与えられる. オイラー方程式を解いて, 時刻 t における角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}(t)$ を求めよう.

応用数理 B ファイナルトライアル略解

樋口さぶろお[2] 配布: 2011-01-25 Tue 更新: Time-stamp: "2011-02-06 Sun 22:46 JST hig"

1

$L(z,\dot{z}) = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - (-mgz).$

2

$$
\begin{aligned}
m\ddot{r} =& mr\dot{\theta}^2 - \frac{k}{r^2} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr^2\dot{\theta}) =& 0
\end{aligned}
$$

配点 r 方向 3 点, θ 方向 2 点.

講評 θ 方向の左辺を $mr^2\ddot{\theta}$ にしてしまう人が一定数いました.

3

共役運動量は $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2a\dot{x} + bx$. よって, $\dot{x} = \frac{p-bx}{2a}$.
ハミルトニアンは

$$H(x,p) = \dot{x}p - L(x,\dot{x}) = \frac{p-bx}{2a}p - L(x, \tfrac{p-bx}{2a}) = \frac{(p-bx)^2}{4a} - cx^b 2 - dx^4$$

4

$$
\begin{aligned}
\dot{r} =& \frac{p_r}{m}, \\
\dot{\theta} =& \frac{p_\theta}{mr^2}, \\
\dot{p_r} =& \frac{p_\theta^2}{mr^3} - 2r, \\
\dot{p_\theta} =& 0
\end{aligned}
$$

---

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

配点　p_r が 2 点, それ以外 1 点.

5

回転運動の運動エネルギーは, $K = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$ なので,

$$L(\theta, \dot{\theta}) = K - U(\theta) = \tfrac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + 3ma\cos\theta.$$

配点　運動エネルギー 5 点, 位置エネルギー 5 点.

6

各物体の z 軸までの距離の 2 乗を考えて, 慣性モーメントは

$$I = 1(1^2 + 4^2) + 2(0^2 + 0^2) + 4(0^2 + 1^2) = 21.$$

講評　z 軸までの距離でなく, 原点までの距離を考えてしまっている人が一定数いました.

7

慣性モーメントは

$$I_{33} = 1(1^2 + 4^2) + 2(4^2 + 1^2) + 4(1^2 + 1^2) = 59, \quad I_{11} = 171, I_{22} = 186.$$

慣性乗積は

$$I_{12} = 1 \cdot 4 \cdot 9 + 2 \cdot 1 \cdot 4 + 4(-1)3 = 8, \quad I_{23} = 32, \quad I_{31} = 53.$$

よって慣性テンソルは

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{12} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{13} & -I_{23} & I_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 171 & -8 & -53 \\ -8 & 186 & -32 \\ -53 & -32 & 59 \end{pmatrix}.$$

配点　対称行列になっていること 1 点, 非対角成分にマイナスをつけていること 1 点, 考え方が正しいこと 2 点, 各成分 6 点.

8

回転の運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2}K\omega^2.$$

角速度ベクトルは, 右ねじの法則より $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, -\omega)$ なので, 角運動量ベクトルは $\boldsymbol{L} = (0, 0, -I\omega)$.

配点　各 5 点. $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{t}} I\boldsymbol{\omega}, I\boldsymbol{\omega}$ という一般論だけが書いてある時は 2 点, 1 点. 問題にでてきてる I はテンソルじゃなくて, 慣性モーメントだから本当はおかしいんだけどね.

講評　角運動量はベクトルなのにベクトルとして答えてない人が一定数いました.

9

慣性テンソルの固有値は $\lambda = 2(\text{重解}), 6$.
$\lambda = 6$ に対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} s$.
$\lambda = 2$ に対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t$ (s, t は任意の実数).
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は直交しているので, 慣性主軸は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と選べる. このとき主慣性モーメントは $2, 2, 6$ である.

Remark　本当は, 2 に対応する慣性主軸として, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t$ から 2 個の直交するベクトルを自由に選んでいい. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sin\theta, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin\theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos\theta, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(\theta \in [0, \frac{1}{2}\pi))$ という一般的な表示も可能.

配点　固有値 2(重根) が各 1 点, 6 が 2 点. 3 つの固有ベクトル (慣性主軸の方向) が各 2 点.

講評　第 1 成分はすでに対角化されてるから 2,3 成分だけで対角化すればいいけど, 第 1 成分と統合して 3 次元で答えられていない人が一定数いました.

10

遠心力は

$$-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = -m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 6t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18mt \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

コリオリの力は,

$$-2m\boldsymbol{\omega} \times \frac{\delta \boldsymbol{r}}{\delta t}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -12m \\ 0 \end{pmatrix}.$$

配点　各 5 点

11

慣性力は

$$-10\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = (0, 0, -100\cos t).[\mathrm{N}]$$

12

オイラー方程式は

$$\begin{aligned} 3\dot{\omega}_1 &= (2-3)\omega_2\omega_3, \\ 2\dot{\omega}_2 &= (3-3)\omega_3\omega_1, \\ 3\dot{\omega}_3 &= (3-2)\omega_1\omega_2. \end{aligned}$$

初期条件より $\omega_2(t) = \omega_2(0) = 4$. よって,

$$\begin{aligned} 3\dot{\omega}_1 &= -4\omega_3, \\ 3\dot{\omega}_3 &= +4\omega_1. \end{aligned}$$

ω_3 を消去すると,

$$\ddot{\omega}_1 = -(\tfrac{4}{3})^2\omega_1.$$

よって,

$$\begin{aligned} \omega_1(t) =& A\cos\tfrac{4}{3}t + B\sin\tfrac{4}{3}t, \\ \omega_3(t) =& -\tfrac{4}{3}\dot{\omega}_1(t) = A\sin\tfrac{4}{3}t - B\cos\tfrac{4}{3}t. \end{aligned}$$

初期条件より,

$$\begin{aligned} \omega_1(t) =& 2\cos\tfrac{4}{3}t, \\ \omega_3(t) =& 2\sin\tfrac{4}{3}t. \end{aligned}$$

まとめると,

$$\boldsymbol{\omega}(t) = (2\cos\tfrac{4}{3}t, 4, 2\sin\tfrac{4}{3}t).$$

配点　オイラー方程式 6 点. ω_1 または ω_3 の一般解 2 点, 初期条件から任意定数を決めた最終的な答え 2 点.

http://hig3.net