応用数理 B

樋口さぶろお[1] 配布: 2010-09-28 Tue 更新: Time-stamp: "2010-09-27 Mon 12:11 JST hig"

はじめに

参考書

高木 I で参考書高木, 力学 (I), 裳華房 (2001) より引用 を示します (物理数学・力学の教科書でした).
高木 II で参考書高木, 力学 (II), 裳華房 (2001) より引用 を示します (力学の教科書でした).

この授業ののり 黒板中心. 授業の最後に毎回 quiz を解いて提出してもらいます.

オフィスアワー 月昼と火 6. 1-502.

講義の Web ページ `http://hig3.net/` から簡単にたどっていけます. 携帯対応 (QR コード).

成績の計算 コアでもないのに注文の多い科目です… 現在の点数は e ラーニングサイトで見られるようになる予定.

科目の成績 100 ピーナッツ

- 10 ピーナッツ:毎回授業での quiz
- 10 ピーナッツ:授業時間外の予習復習
  - e ラーニングサイト ReLS で毎回表示される問題に解答. 水曜昼から月曜夜まで解答可能.
- 30 ピーナッツ:プチテスト いまのところ 2010-11-16 を予定
- 50 ピーナッツ:ファイナルトライアル
- 追加 0–10 ピーナッツ?:模範解答を作ろうプロジェクトへの参加 (あるかどうか未定)
  - e ラーニングサイト ReLS で時々出題される問題に対して模範解答を投稿. 追って説明します.

欠席届 ポリシー変えました. 専用用紙に事情を証明できる書類を貼って, 授業前後各 5 分に提出してください (事後でも OK. ファイナルトライアルのときが締切)

---

[1]
hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

1　座標変換

今日の目標

- 直交座標で書かれた運動方程式を, 他の座標 (一般化座標) で書き直せるようになろう.

復習事項

1.0.1　記号

今まで封印してたけど, 力学ののりでは, 文字の上についた dot $\dot{}$ は時間 t による微分を表す. この科目ではあまりに便利なので封印を解きます.

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad \dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t},$$
$$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}, \quad \ddot{r} = \frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}.$$

1.0.2　Newton の運動方程式

物理数学

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}(t) = \boldsymbol{F}(t)$$

1.0.3　保存力とポテンシャル

ベクトル解析

$\boldsymbol{F}$:保存力, $U(\boldsymbol{r})$: (スカラー) ポテンシャル

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla U(\boldsymbol{r}) = -(\tfrac{\partial U}{\partial x}, \tfrac{\partial U}{\partial y}, \tfrac{\partial U}{\partial z}), \quad U(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}') \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}'.$$

1.0.4　(平面) 極座標

微積分 II, 力学

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \arctan\tfrac{y}{x}$$

1.0.5　多変数の合成微分

微積分 I

関数 $r(x(t), y(t))$ に対して,

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

時間微分を dot で書くと,

$$\dot{r} = \frac{\partial r}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial r}{\partial y}\dot{y}.$$

関数 $U(x(r,\theta), y(r,\theta))$ に対して,

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}.$$

1.0.6　力学的エネルギー保存則

力学

$$\begin{aligned} \text{運動エネルギー} \quad K(\dot{\boldsymbol{r}}) =& \frac{1}{2}m\left|\dot{\boldsymbol{r}}\right|^2, \\ \text{位置 (ポテンシャル) エネルギー} \quad U(\boldsymbol{r}) =& \text{(問題によって異なる)} \end{aligned}$$

のとき

$$\text{力学的エネルギー} \quad E = K(\dot{\boldsymbol{r}}(t)) + U(\boldsymbol{r}(t)) = \text{定数 (時間 } t \text{ によらない)}$$

1.1　quiz:動径方向の運動方程式

角度方向の運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr^2\dot{\theta}) = -\frac{\partial U}{\partial \theta}$$

を求めたのと同じのりで, 動径方向の運動方程式

$$m \cdot (r,\theta \text{ の式. これを求める}) = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

を求めよう.

1.2　quiz:ポテンシャルと座標変換

ポテンシャルエネルギーが, 直交座標 (u, v) により $U(x, y) = (x^2 + y^2)^2$ で与えられる. 一方, 座標 (u, v) は, (x, y) と,

$$
\begin{aligned}
x =& u + 2v \\
y =& u - 2v
\end{aligned}
$$

という関係にある.

合成関数の微分法を利用して, $\frac{\partial U}{\partial u}, \frac{\partial U}{\partial v}$ を u, v で表そう. 答えは展開しなくていい, っていうか, 展開してない見やすい答えのほうがいいな〜

次回の予習ポイント

- 斜面, ばねの運動 (物理数学).
- ポテンシャル (ベクトル解析, 力学)
- 振り子 (現象の数学 B, 受講した 4 年生は)

目次 前回 次回 略解