応用数理 B

樋口さぶろお[1] 配布: 2010-10-26 Tue 更新: Time-stamp: "2010-10-26 Tue 09:18 JST hig"

4 略解:ハミルトンの変分原理

4.1 略解:ラグランジアンの変数変換

再出題予定

4.2 略解:ラグランジアンの変数変換

再出題予定

4.3 略解:拘束条件付き問題のラグランジアン

1. $\tilde{L}(r, \theta, \lambda, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\lambda}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) + \lambda(\theta - \omega t)$.
2.

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mr^2\dot{\theta}) = \lambda \tag{2}$$

$$0 = \theta - \omega t \tag{3}$$

3. (3) より $\theta(t) = \omega t$. $\dot{\theta} = \omega, \ddot{\theta} = 0$. (1),(2) に代入して,

$$\ddot{r} = r\omega^2 \tag{1'}$$

$$0 = \lambda \tag{2'}$$

$(1')$ より, $r(t) = C_1 \mathrm{e}^{\omega t} + C_2 \mathrm{e}^{-\omega t}$. 初期条件 $r(0) = a, r'(0) = 0$ より, $r(t) = \frac{a}{2}\mathrm{e}^{\omega t} + \frac{a}{2}\mathrm{e}^{-\omega t} = a\cosh \omega t$.

5 ハミルトンの運動方程式

今日の目標

- ラグランジアンが与えられたとき, 一般化座標の共役運動量を求められるようになろう.
- ラグランジアンから, ハミルトニアンを求められるようになろう.
- ハミルトニアンから, ハミルトンの運動方程式を求められるようにろう.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

5.1 quiz:ハミルトンの運動方程式

重力を受けて鉛直方向に運動する物体のラグランジアン $L(y, \dot{y}) = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy$ を考える.

1. y の共役運動量 p を求めよう.
2. $\dot{y}$ を y, p で表そう.
3. ハミルトニアン $H(y, p)$ を求めよう.
4. ハミルトンの運動方程式を求めよう.

5.2 quiz:ハミルトンの運動方程式

極座標で書かれた 2 次元を運動する物体のラグランジアン $L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) - \frac{1}{2}kr^2$ を考える.

1. r, θ の共役運動量 p_r, p_θ を求めよう.
2. $\dot{r}, \dot{\theta}$ を r, θ, p_r, p_θ で表そう.
3. ハミルトニアン $H(r, \theta, p_r, p_\theta)$ を求めよう.
4. ハミルトンの運動方程式を求めよう.

予習復習問題をやろう!

明日水曜日の昼から来週月までeラーニングシステムで公開するのでやってね〜

目次 前回 次回 略解