応用数理 B

樋口さぶろお[1] 配布: 2010-11-09 Tue 更新: Time-stamp: "2010-11-09 Tue 15:20 JST hig"

6 略解:位相空間

6.1 略解:物理量の時間変化とポアソン括弧式

ベクトル記法を用いて表すこともできるが, 無理にする必要はない.

1. 位置エネルギーは $U(x,y,z)=\frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2)$ で与えられるので,

$$L(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})=\tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-\tfrac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2).$$

2. 共役運動量の定義 $p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}$ などに注意すると,

$$H(x,y,z,p_x,p_Y,p_z)=p_x\dot{x}+p_y\dot{y}+p_z\dot{z}-L(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})=\tfrac{1}{2}m(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+\tfrac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2)$$

3.

$$\begin{aligned}\dot{x}=&p_x/m & \dot{p}_x=&-kx\\ \dot{y}=&p_y/m & \dot{p}_y=&-ky\\ \dot{z}=&p_z/m & \dot{p}_z=&-kz\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}=&\frac{\partial K}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p_x}+\frac{\partial K}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial p_y}+\frac{\partial K}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial p_z}-\frac{\partial K}{\partial p_x}\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{\partial K}{\partial p_y}\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\partial K}{\partial p_z}\frac{\partial H}{\partial z}\\ =&0\cdot p_x/m+0\cdot p_y/m+0\cdot p_z/m-p_x/m\cdot kx-p_y/m\cdot ky-p_z/m\cdot kz\\ =&-\tfrac{k}{m}(xp_x+yp_y+zp_z).\\ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=&\cdots=+\tfrac{k}{m}(xp_x+yp_y+zp_z).\end{aligned}$$

7 正準変換

今日の目標

1. 正準変換の意味を説明できるようになろう.
2. 正準変換後のハミルトンの運動方程式を導出できるようになろう

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

7.1 quiz:

位相空間 (x,p) において, ハミルトニアン $H(x,p)=p^2+px+x^2$ を考える.
正準変換 $(x,p)\to(X,P)$ を $p=\frac{1}{\sqrt{2}}(-X+P), x=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+P)$ で定める.

1. ハミルトニアンを X,P で書き直そう.
2. X,P についてのハミルトンの運動方程式を書き, 解こう (初期条件がないので任意定数が残る)
3. $x(t),p(t)$ を求めよう.

予習復習問題をやろう!

明日水曜日の昼から来週月までeラーニングシステムで公開するのでやってね〜

プチテストやります!

日時 2010-11-16 火 5, 90 分.
場所 いつもと同じ.
配点 100 点が 30 ピーナッツ.
公欠 基準と手続きが独自です. Web ページの病欠・公務欠席等の届出とそれを考慮する (しない) 方法参照.

出題計画

- ラグランジアンを書こう (1 次元)
- ラグランジアンを書こう (2 次元)
- ラグランジアンを書こう (ラグランジュ未定乗数による拘束付き)
- オイラー-ラグランジュの運動方程式を求めよう
- オイラー-ラグランジュの運動方程式を解こう (ラグランジュ未定乗数による拘束付き)
- ハミルトニアンを求めよう
- ハミルトンの運動方程式を求めよう (1 次元)
- ハミルトンの運動方程式を求めよう (2 次元)
- ハミルトンの運動方程式を使って物理量の時間変化を求めよう.
- 正準変換が与えられたときに, ハミルトニアンを求め, ハミルトンの運動方程式を導出しよう.

目次 前回 次回 略解