応用数理 B

樋口さぶろお[1]
配布: 2010-11-30 Tue 更新: Time-stamp: "2010-12-01 Wed 10:03 JST hig"

7 略解:正準変換

7.1 略解:正準変換

1. $H(X,P) = H(X(x,p), P(x,p)) = \frac{3}{2}P^2 + \frac{1}{2}X^2$.
2. ハミルトンの運動方程式は

$$\begin{aligned}\dot{X} =& \frac{\partial H}{\partial P} = 3P,\\ \dot{P} =& -\frac{\partial H}{\partial X} = -X.\end{aligned}$$

P を消去して $\ddot{X} = -3X$. よって $X(t) = A\cos(\sqrt{3}t - \theta)$. $P(t) = \frac{1}{3}\dot{X} = -\frac{1}{\sqrt{3}}A\sin(\sqrt{3}t-\theta)$. A, θ は任意定数.

3.

$$\begin{aligned}x(t) =& \frac{1}{\sqrt{2}}(X+P) = \frac{A}{\sqrt{2}}(\cos(\sqrt{3}t-\theta) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t-\theta)).\\ p(t) =& \frac{1}{\sqrt{2}}(-X+P) = \frac{A}{\sqrt{2}}(-\cos(\sqrt{3}t-\theta) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t-\theta)).\end{aligned}$$

講評 正準変換そのものについてでなく, 連立微分方程式の解き方についてです.

誤り例 1: $\dot{X} = 3P$ より $X = 3Pt + C_1$. $\dot{P} = -X$ より $P = -Xt + C_2$.

P と X どっちが t の次数高いの? 見るからに変. 求めるべき X, P が答えに残ってるんだから.

それに, $X(t), P(t)$ は時間 t に依存するから積分するとき t をかけるだけではだめ. $\int t^3\,\mathrm{d}t = t \times t^3 + C$ ですか?

$\dot{X} = (3Pt + C_1)' = 3P't + 3P$ でもとの方程式成立してないでしょ. 微分方程式は, 答の候補が見つかったら, もとの微分方程式に代入して, 成立してるかチェックする.

誤り例 2: $\ddot{X} = -3X$ より $X(t) = A_1\cos(\sqrt{3}t - \theta_1)$. 同様に $\ddot{P} = -3P$ より $P(t) = A_2\cos(\sqrt{3}t - \theta_2)$.

これは間違いじゃないけど, 不十分. このままだと, もとの 2 個の微分方程式を満たしてない. $\dot{P} = -\sqrt{3}A_2\sin(\sqrt{3}t-\theta_2) \neq -X$. 微分方程式は, 答の候補が見つかったら, もとの微分方程式に代入して, 成立してるかチェックする. これが $=$ になるべきってことから, A_2 と θ_2 の条件が出る.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

だって 1 階の 2 変数の連立微分方程式なのに, 積分定数が 4 個残ってるって変でしょ. $\dot{X} = 3P$, $\dot{P} = -X$ に代入して, 先に求まってる X に合うように積分定数 A_2, θ_2 を決めなきゃいけないってこと.

誤り例 3: $\ddot{X} = -3X$ より $X(t) = A_1 \cos(\sqrt{3}t - \theta_1)$. $\dot{P} = -X$ より $P(t) = +\frac{1}{\sqrt{3}} A_1 \sin(\sqrt{3}t - \theta_1) + C_2$.

これは間違いじゃないけど, 不十分. このままだと, もとの 2 個の微分方程式を満たしてない. $\dot{X} = -\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t - \theta_1) \neq -3P$. 微分方程式は, 答の候補が見つかったら, もとの微分方程式に代入して, 成立してるかチェックする. これが $=$ になるべきってことから, $C_2 = 0$ がでる.

1 階の 2 変数の連立微分方程式なのに, 積分定数が 3 個残ってるって変でしょ. $\dot{X} = 3P$ に代入して, 先に求まってる X に合うように積分定数を 1 個決めなきゃいけいってこと. 実は, 最初から $\dot{X} = 3P$ を使えば手間が省けた.

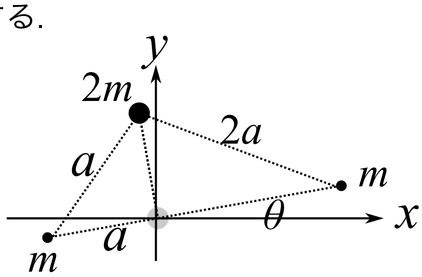
8 剛体の回転の方程式

今日の目標

- 剛体の回転の運動方程式を書ける.
- 剛体の運動エネルギーが求められる.
- 剛体の回転のラグランジアン, ハミルトニアンが求められる.

8.1 quiz:慣性モーメントと回転の運動エネルギー

図のように, 3 個の物体を軽くて変形しない棒でつなぎ, 固定軸のまわりで回転できるようにした. 固定軸を z 軸とし, これらの物体は xy 平面内で回転するとする. また, y 軸の負の向きに重力 (重力加速度の大きさ g) がはたらく. 剛体の回転角を図のように θ とする.



1. 固定軸のまわりの慣性モーメント I_z を求めよう.
2. 位置エネルギー $U(\theta)$ を求めよう.
3. 回転の運動方程式を求めよう.

今日の範囲に対応する教科書のお奨め問題

高木 II p.83-111

次回の予習ポイント

- 外積
- 面積分, 体積分

予習復習問題をやろう!

明日水曜日の昼から来週月まで e ラーニングシステムで公開するのでやってね〜

目次 前回 次回 略解