応用数理 B

樋口さぶろお[1] 配布: 2010-12-07 Tue 更新: Time-stamp: "2010-12-07 Tue 19:00 JST hig"

8 略解:剛体の回転の運動方程式

8.1 略解:慣性モーメントと回転の運動エネルギー

1. $I = m(\sqrt{3}a)^2 + 2ma^2 + ma^2 = 6ma^2$.
2. $U(\theta) = mg\sqrt{3}a\sin\theta + 2mga\sin(\theta + \frac{1}{2}\pi) + mga\sin(\theta + \pi) = mg(\sqrt{3} - 1)a\sin\theta + 2mga\cos\theta$.
3. 運動方程式は $I\ddot{\theta} = -\frac{\partial U}{\partial\theta}(\theta)$ より $6ma^2\ddot{\theta} = -mg(\sqrt{3} - 1)a\cos\theta + 2mga\sin\theta$. 平衡点や微小振動の周期を考えてみても楽しいかも.

9 固定点をもつ剛体の回転

今日の目標

- 固定点のある回転運動で, 角速度ベクトルと角運動量ベクトルの関係が説明できる.
- 慣性テンソルが求められる.

復習事項

9.0.1 ベクトル 3 重積

$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$
cf. スカラー 3 重積 $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ のはる平行 6 面体の体積.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

9.0.2 慣性テンソル．慣性モーメント．慣性乗積

$$
\begin{aligned}
\text{慣性テンソル } I &= \begin{pmatrix} +I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & +I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & +I_{33} \end{pmatrix} \\
\text{慣性モーメント } I_{11} &= \sum_i m^i((x_2^i)^2 + (x_3^i)^2) \\
I_{22} &= \sum_i m^i((x_1^i)^2 + (x_3^i)^2) \\
I_{33} &= \sum_i m^i((x_1^i)^2 + (x_2^i)^2) \\
\text{慣性乗積 } I_{12} = I_{21} &= \sum_i m^i x_1^i x_2^i \\
I_{23} = I_{32} &= \sum_i m^i x_2^i x_3^i \\
I_{13} = I_{31} &= \sum_i m^i x_3^i x_1^i
\end{aligned}
$$

9.1 quiz:慣性モーメント，慣性乗積

長方形の 4 頂点 $(\pm\frac{1}{2}a, \mp\frac{\sqrt{3}}{2}a, 0)$, $(\pm a, 0, 0)$ $(a > 0)$ に，それぞれ質量 m の物体が置かれ，軽い棒で連結されている．これを剛体とみなす．原点のまわりの慣性テンソルを考える．

1. 慣性モーメント I_{11}, I_{22}, I_{33} を求めよう．
2. 慣性乗積 I_{12}, I_{13}, I_{23} を求めよう．
3. 対称性を利用して推測することで，すべてを具体的に計算することなしに，慣性テンソル I を書こう．
4. 慣性テンソルを直交行列で対角化しよう．対角化行列はどれだけの角の回転に相当するか．

9.2 quiz:慣性モーメント，慣性乗積

直方体の 8 頂点 $(\pm a, \pm b, \pm c)$ $(a, b, c > 0)$ に，それぞれ質量 m の物体が置かれ，軽い棒で連結されている．これを剛体とみなす．原点のまわりの慣性テンソルを考える．

1. 慣性モーメント I_{11}, I_{22} を求めよう．
2. 慣性乗積 I_{12}, I_{21} を求めよう．
3. 対称性を利用して推測することで，すべてを具体的に計算することなしに，慣性テンソル I を書こう．

次回の予習ポイント

予習復習問題をやろう!

明日水曜日の昼から来週月までｅラーニングシステムで公開するのでやってね〜

目次 前回 次回 略解