応用数理 B

樋口さぶろお[1] 配布: 2010-12-21 Tue 更新: Time-stamp: "2010-12-22 Wed 09:53 JST hig"

10 略解:固定点をもつ剛体の回転

10.1 略解:慣性モーメント, 慣性乗積

1. $x_3^{(i)}$ はすべて zero であることに注意すると,

$$
\begin{aligned}
I_{11} =& ma^2[(-\tfrac{\sqrt{3}}{2})^2 + 0^2 + (\tfrac{\sqrt{3}}{2})^2 + 0^2] = \tfrac{3}{2}ma^2 \\
I_{22} =& ma^2[\tfrac{1}{2})^2 + 1^2 + (-\tfrac{1}{2})^2) + (-1)^2)] = \tfrac{5}{2}ma^2 \\
I_{33} =& ma^2[((\tfrac{1}{2})^2 + (-\tfrac{\sqrt{3}}{2})^2) + (1^2 + 0^2) + ((-\tfrac{1}{2})^2 + (+\tfrac{\sqrt{3}}{2})^2) + ((-1)^2 + 0^2)] = 4ma^2
\end{aligned}
$$

これで気づいたかもしれないが, すべての物体が $x_3 = 0$ のとき (つまり物体がうすい板状のとき), $I_{11} + I_{22} = I_{33}$ が成立する.

2. $x_3^{(i)} = 0$ であるために, $I_{13} = I_{23} = 0$.

$$
I_{12} = ma^2[(\tfrac{1}{2}(-\tfrac{\sqrt{3}}{2})) + (1 \cdot 0) + ((-\tfrac{1}{2})(+\tfrac{\sqrt{3}}{2})) + ((-1) \cdot 0)] = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}ma^2
$$

3.

$$
I = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \times \tfrac{1}{2}ma^2.
$$

4. ブロック対角なので実質的には 2×2 行列の対角化をすればよい.

$$
I = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}0 & \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \\ 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

ここで対角化行列 P は, 直交行列, すなわち ${}^{\mathrm{t}}PP = E$ を満たすように選んだ. P は $\frac{1}{6}\pi$ の回転行列になっている.
よって, 2 つの慣性主軸は長方形の 2 辺に平行, 1 つの慣性主軸は長方形のある面に垂直であることがわかる.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

11　回転座標系とオイラー方程式

今日の目標

- 回転座標系での運動方程式の意味が説明できる
- 回転座標系での慣性力の種類と意味が説明できる
- オイラー方程式とその各変数の意味が説明できる

11.1　quiz:遠心力とコリオリ力

$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ (時間的に一定) で原点を中心として回転する加速度座標系を考える (自転する地球に固定された座標系を想像しよう).

ある時刻に, 慣性系で, 質量 m の物体が, $\boldsymbol{r} = (a\cos\frac{1}{6}\pi, a\sin\frac{1}{6}\pi, 0)$ にあった.

1. 遠心力を (成分で) 求めよう.

11.2　quiz:遠心力とコリオリ力

$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ (時間的に一定) で原点を中心として回転する加速度座標系を考える (自転する地球に固定された座標系を想像しよう).

ある時刻に, 慣性系で, 質量 m の物体が, 位置 $\boldsymbol{r} = (R\sin\frac{1}{6}\pi, 0, R\cos\frac{1}{6}\pi)$, 速度 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (-v\cos\frac{1}{6}\pi, 0, v\sin\frac{1}{6}\pi)$ で半径 R の球の折線方向に進んでいた.

1. 遠心力を (成分で) 求めよう.
2. コリオリ力を (成分で) 求めよう.
3. R を地球の半径, ω を地球の自転の加速度, m を 1000kg とするとき, 遠心力の大きさを求めよう.

予習復習問題をやろう!

明日水曜日の昼から来週月までｅラーニングシステムで公開するのでやってね〜

目次 前回 次回 略解