微積分♪演習 (略解) (情報メディア学科 1 年次科目)

樋口さぶろお[1] 配布: 2006-11-08 Wed 更新: Time-stamp: "2006-12-14 Thu 07:56 JST hig"

6 テイラー展開の応用とテイラー級数

6.1 お奨め問題

略解

1. $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^6 2^k}{k!}(x-3)^k$.
2. $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$.
3. $\ln(1.1) = f(0.1) \approx 0.1 - 0.005 = 0.095$.

6.2 テイラー展開と近似

略解

1. $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1/2}{1!}(x - \frac{\pi}{3}) + \frac{-\sqrt{3}/2}{2!}(x-\frac{\pi}{3})^2 + O((x-\frac{\pi}{3})^3)$.
2. $f(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{90}) = 0.8660254\ldots + 0.0174533\ldots - 0.0005276\ldots = 0.882951$.
3. $f(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{90}) = 0.8660254\ldots - 0.0174533\ldots - 0.0005276\ldots = 0.848045$.

6.3 楽してテイラー展開!

略解

1. $\mathrm{e}^y = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}y^k$ に ($x=0$ で $y=0$ となるので) $y=-2x$ を代入して, $\mathrm{e}^{-2x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k!}x^k$
2. $\sinh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{1}{2}(x^k - (-x)^k) = \sinh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{1}{2}(x^k - (-x)^k) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)!}x^{2\ell+1}$
3. $\displaystyle\frac{1}{1-y} = \sum_{k=0}^{\infty} y^k$ に ($x=0$ で $y=0$ となるので) $y=-2x$ を代入して, $\displaystyle\frac{1}{1+2x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k x^k$.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), tel: 0775437514 数理情報学科へや:1 号館 5 階 502.

4. $\frac{3x}{2+x} = 3 - \frac{3}{1-(-\frac{1}{2}x)} = 0 - \sum_{k=1}^{\infty} 3(-\frac{1}{2})^k x^k$.

6.4 もっとテイラー/マクローリン展開/級数

略解

1. $f(x) = \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-2)^3 + O((x-2)^4)$.
2. $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(-1)^k(x-1)^k$.
3. $y = -x^2$ とおくと $y = 0$ のとき $x = 0$ となることに注意して $\mathrm{e}^y = 1+y+\frac{1}{2}y^2+O(y^3)$ に代入すると $f(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 + O(x^6)$. または, 定義に従って計算しても同じ結果になる.
4. $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^3}{k!}x^k$.