微積分◇演習ファイナルトライアル (情報メディア学科 1 年次科目)

樋口さぶろお[1] 配布: 2004 年 01 月 21 日更新: Time-stamp: "2004/01/30 Fri 16:15 hig"

注意

1. 出席チェックのときに学生証を見せてね.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.
4. すべての問で $x, y \in \mathbb{R}$ です.
5. 外部記憶ペーパー作成 10 分 + 答案作成 80 分

1

1. 関数 $f(x) = \mathrm{e}^{3x-1}$ の, $x = -2$ のまわりのテイラー級数を求めよう. e^x のマクローリン級数の公式を理由なしに用いてもよい.
2. 関数 $g(x) = \log(2 + x)$ の, $x = 1$ のまわりの 2 次のテイラー展開を求めよう. 剰余項 $R_3(x)$ は, パラメータ $0 < \theta < 1$ を用いて表そう.

2

次の不定積分, 定積分 (広義積分も含む) を求めよう.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{3} \mathrm{e}^{-2x+1}\,\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int_{-2}^{5} 2\mathrm{sgn}(x-1)\,\mathrm{d}x.$ (グラフから図形の面積を利用して求めてもよい)
3. $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{\pi/2}} x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x.$ ($t = x^2$ とおいて置換積分を用いてもよい)
4. $\displaystyle\int_{2}^{-\infty} x\cdot\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x.$ (部分積分を用いてもよい)
5. $\displaystyle\int \frac{x^2-2x-6}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x.$ (部分分数展開を用いてもよい. これは不定積分)
6. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$
7. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \mathrm{e}^{3ix}\,\mathrm{d}x.$ ($i = \sqrt{-1}$. できるだけ簡単化して, e の残らない形で答えよう)
8. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,\mathrm{d}x.$ ($a > 0$ は定数. ガウス積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ の公式は理由なしに使ってよい)

---

http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, tel:0775437501 数理情報学科へや:1 号館 5 階 508.

3

1. 直交座標 (x, y) で書かれた 2 重積分

$$I_1 = \iint_D (2xy + y^2)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y, \qquad (D \text{ は } (-1, 0), (0, 0), (-1, -2) \text{ を 3 頂点とする 3 角形})$$

の値を求めよう.

2. 直交座標 (x, y) で書かれた 2 重積分

$$I_2 = \iint_D x\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y, \qquad D = \{(x, y) | 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4, -x \leqq y \leqq +x\}$$

考える.

(a) 積分範囲を図示しよう.
(b) 積分 I_2 を極座標 (r, θ) を用いて書き直そう. ヤコビアンは公式を用いてよい.
(c) 変数 r, θ についての 2 重積分を計算し, I_2 の値を求めよう.

3. 直交座標 (x, y) で書かれた 2 重積分

$$I_3 = \iint_D y^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y, \qquad D = \{(x, y) | 0 \leqq x + 2y \leqq 2, 0 \leqq 2y - x \leqq 1\}$$

を考える.

(a) 変数変換 $u = x + 2y, v = 2y - x$ を行う. ヤコビアン $J(u, v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよう.
(b) 変数 u, v についての 2 重積分を計算し, I_3 の値を求めよう.

微積分◇演習ファイナルトライアル (略解) (情報メディア学科 1 年次科目)

樋口さぶろお[2] 配布: 2004 年 01 月 21 日更新: Time-stamp: ”2004/01/30 Fri 16:15 hig”

1

1. マクローリン展開 $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ を利用して,

$$f(x) = \mathrm{e}^{-7}\mathrm{e}^{3(x+2)} = \mathrm{e}^{-7}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(3(x+2))^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-7}3^k}{k!}(x+2)^k. \tag{1}$$

2.

$$g^{(0)}(x) = \log(2+x), \quad g^{(0)}(1) = \log 3. \tag{2}$$
$$g^{(1)}(x) = \tfrac{1}{x+2}, \quad g^{(1)}(1) = \tfrac{1}{3}. \tag{3}$$
$$g^{(2)}(x) = -\tfrac{1}{(2+x)^2}, \quad g^{(2)}(1) = -\tfrac{1}{9} \tag{4}$$

より,

$$g(x) = \log 3 + \tfrac{1}{3}(x-1) - \tfrac{1}{18}(x-1)^2 + R_3(x). \tag{5}$$

また, $g^{(3)}(x) = \frac{2}{(2+x)^3}$ より,

$$R_3(x) = \tfrac{1}{3!}\tfrac{2}{(2+1+\theta\cdot(x-1))^3}(x-1)^3. \tag{6}$$

2

1.

$$\int_{-1}^{3} \mathrm{e}^{-2x+1}\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{2}[\mathrm{e}^{-2x+1}]_{-1}^{3} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^{-5}). \tag{7}$$

2.

$$\int_{-2}^{5} 2\mathrm{sgn}(x-1)\,\mathrm{d}x = 2\int_{-2}^{1}\mathrm{sgn}(x-1)\,\mathrm{d}x + 2\int_{1}^{5}\mathrm{sgn}(x-1)\,\mathrm{d}x = -6+8 = 2. \tag{8}$$

3.

$$\int_{0}^{\sqrt{\pi/2}} x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \left[-\cos t\ \tfrac{1}{2}\right]_{0}^{\pi/2} = \tfrac{1}{2}. \tag{9}$$

http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, tel:0775437501 数理情報学科へや:1 号館 5 階 508.

4.

$$\int_2^{-\infty} x \cdot \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = \left[x\tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\right]_2^{-\infty} - \int_2^{-\infty} \tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x = -\tfrac{5}{9}\mathrm{e}^6. \tag{10}$$

5. 積分定数を C として,

$$\int \frac{x^2-2x-6}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x = \int \left(1+\tfrac{1}{x+1}-\tfrac{2}{x-2}\right)\mathrm{d}x = x + \log\tfrac{|x+1|}{(x-2)^2} + C. \tag{11}$$

6. $x = \sin t$ とおくと, $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$, $t: 0 \to \frac{\pi}{2}$ で,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t}\mathrm{d}t = \tfrac{\pi}{2}. \tag{12}$$

7. $\mathrm{e}^{3\pi i} = \mathrm{e}^{\pi i} = -1$ に注意して,

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{3ix}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3i}[\mathrm{e}^{3ix}]_0^{\pi} = \tfrac{1}{3i}(\mathrm{e}^{3\pi i}-1) = \tfrac{-2}{3i} = \tfrac{2i}{3}. \tag{13}$$

8. $t = \frac{x}{\sqrt{2}\cdot a}$ とおいて,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\cdot a \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}\cdot a. \tag{14}$$

3

1.

$$I_1 = \int_{-1}^{0}\left\{\int_{2x}^{0}(2xy+y^2)\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x = \int_0^{-2}\left\{\int_{-1}^{y/2}(2xy+y^2)\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}y = \int_{-1}^{0} -\tfrac{20}{3}x^3\,\mathrm{d}x = \tfrac{5}{3}. \tag{15}$$

2. (a) 略. $1 \leqq r \leqq 2, -\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq +\frac{\pi}{4}$.

(b) $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ に注意して,

$$I_2 = \int_1^2 \mathrm{d}r \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta\; r^2\cos\theta. \tag{16}$$

(c)

$$I_2 = \int_1^2 r^2\,\mathrm{d}r \times \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \tfrac{7\sqrt{2}}{3}. \tag{17}$$

3. (a) $x = \frac{1}{2}(u-v), y = \frac{1}{4}(u+v)$ より, $J(u,v) = \frac{1}{4}$.

(b)

$$I_3 = \int_0^2 \mathrm{d}u \int_0^1 \mathrm{d}v\,\left(\tfrac{1}{4}(u+v)\right)^2 \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2^6}\int_0^2 (u^2+u+\tfrac{1}{3})\mathrm{d}u = \tfrac{1}{12}. \tag{18}$$

成績は 1 月 31 日までに, 龍大 (生協) インターネットのメールアドレス

(学籍番号+1 文字)`@ryukoku.seikyou.ne.jp`

に連絡します. 携帯メールなど, 他のアドレスで受け取りたい人は, ページ

`http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/course/mail.html`

(`http://hig3.net` からも行けます) の説明にしたがって, あらかじめ転送設定しておいてください.

ファイナルトライアル 講評と樋口の感想

1

冬のプチテスト範囲の再出題です.

2

1. 2003/12/11 の quiz の類題です.
2. 面積を利用して考えるときは, x 軸より下の部分は負の面積として考えることを思いだしましょう.
3. 2003/12/17 の quiz の類題です.
4. 2004/01/07 の quiz の類題です.
5. 2003/12/18 の quiz の類題です. 部分分数展開するときは, いきなり $\frac{A}{x+a}+\frac{B}{x+b}$ とおくのではなく, まず '多項式部分,' 今の場合なら 1 を取り出して, 分子の次数 $<$ 分母の次数としてからしましょう.
6. 置換 $x=\sin t$ を思いつくか, 原始関数が $\operatorname{Arcsin} x$ となることをおぼえているかが期待されます.
7. 複素数の指数関数も, 形式的に実数の場合と同じように積分できます. $\mathrm{e}^{3\pi i}$ はオイラーの公式を使って簡単化できます.
8. 演習問題 13.1.3 の類題です. 変数変換でガウス積分に帰着させられること, ガウス積分の公式をおぼえていることが必要です.,

3

1. 2004/01/14 の quiz の類題です.
2. 演習問題 13.3.2 の類題です.
3. 演習問題 13.3.1 の類題です. ヤコビアンを求めるには, まず連立方程式を解いて, x, y を u, v で表して, 偏微分する必要があります.