微積分◇演習 (情報メディア学科 1 年次科目)

樋口さぶろお[1] 配布: 2003/10/15 Wed 更新: Time-stamp: "2003/10/16 Thu 11:34 hig"

4 無限大と極限の恐怖

保存版. 関数の極限の性質

関数 $f(x), g(x)$ が $x \to a$ で収束して, $\lim_{x\to a} f(x) = A, \lim_{x\to a} g(x) = B$ だとする. ただし, $a = \pm\infty$ でもよいが, $A, B \neq \pm\infty$ とする. 薩摩 p.45

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B. \tag{き 1}$$

$$\lim_{x\to a}(f(x) \times g(x)) = AB. \tag{き 2}$$

$$B \neq 0 \text{ のとき } \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{A}{B}. \tag{き 3}$$

$$f(x) \leqq g(x) \text{ ならば } A \leqq B. \tag{き 4}$$

$$f(x) \leqq h(x) \leqq g(x) \text{ かつ } A = B \quad \text{ならば } \lim_{x\to a} h(x) = A. \qquad \text{(はさみうちの原理)} \tag{き 5}$$

(き 4), (き 5) は薩摩に載ってません.

保存版. 連続関数の性質

関数 $f(x), g(x)$ が連続であるとする. (どの点で連続, ということをいいかげんに書いてます. 正確には薩摩 p.47を見てね.)

$$f(x) \pm g(x) \text{ も連続.} \tag{れ 1-1}$$

$$f(x) \times g(x) \text{ も連続.} \tag{れ 1-2}$$

$$g(x) \neq 0 \text{ のとき } \frac{f(x)}{g(x)} \text{ も連続.} \tag{れ 1-3}$$

$$\text{合成関数 } h(x) = g(f(x)) \text{ も連続.} \tag{れ 2}$$

$$\text{逆関数 } f^{-1}(x) \text{ も連続.} \tag{れ 5}$$

$$f(c) > 0 \text{ のとき}, x = c \text{ の近くでは } f(x) > 0. \tag{れ 6}$$

また, 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続であるとする.

(れ 3) 中間値の定理 $f(a) < f(b)$ のとき, $f(a) < k < f(b)$ となる任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して, $f(c) = k$ を満たす $c \in (a, b)$ が存在する.

(れ 4) 最大値最小値の定理 $f(x)$ が $[a, b]$ で最大, 最小となる $x \in [a, b]$ が存在する.

`http://hig3.net/`(講義のページもここからたどれます), `http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/`, `mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp`, `tel:0775437501` 数理情報学科へや:1 号館 5 階 508.

4.1　お奨め問題

次の極限を求めよう (存在しないかも).

1. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{1+x}{3+x^2}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin x$
4. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\mathrm{e}^{(1-i)x}$

4.2　よく出てくる極限

次の関数について, 極限 $x\to+\infty$, $x\to-\infty$ を求めよう (存在しないかも).

1. $f(x)=\frac{\cos x}{x}$
2. $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
3. $f(x)=\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}$

4.3　極限左極限右極限

次の関数について, 極限 $x\to 0-0, x\to 0+0, x\to 0$ を求めよう (存在しないかも).

1. $f(x)=\frac{1}{x^4}$
2. $f(x)=\frac{|x|}{x}$ $(x\neq 0)$
3. $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$

4.4　複素数に値をとる関数の極限

次の関数について, 極限 $x\to+\infty, x\to-\infty$ を求めよう (存在しないかも).

1. $f(x)=\mathrm{e}^{ix}$
2. $f(x)=\mathrm{e}^{(-1-i)x}$
3. $f(x)=|\mathrm{e}^{-ix}|$

4.5　極限の不定形 (かなり難しいかも)

次の極限を求めよう (存在しないかも).

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left(x\sin\frac{a}{x}\right)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Arcsin}(2x)}{x}$

秋のプチテストやります！

日時範囲などは掲示を参照. 100 点中 15 点分です.

準備としては, まずこれまでの quiz がすんなり解けるようになりましょう. 次に, 演習の問題 (難しいかもを除く) がゆっくりでも解けるようになりましょう. そのくらいで十分だと思いますが, この機会にもっと勉強したい人は, 教科書の例題や章末問題をやってみるといいでしょう.

これまでに quiz や演習で経験した問題と比べると, プチテストでの設問は今までに経験したどれかと同じです. したがって, ‘解き方をおぼえる’ ことはそれなりに効果があります. (本当は解き方の意味までわかってほしいのですが, 今回のプチテストではそこまでは問えないと思います.) しかし, 数値や関数がまでそっくり同じ問題は出しません. 記憶力に頼って答案を丸ごとおぼえるような準備は有効でないと考えられます.

目次 | 前回 | 次回 | 今回の解答