微積分◇演習 (情報メディア学科 1 年次科目)

樋口さぶろお[1] 配布: 2003/11/19 Wed 更新: Time-stamp: "2003/11/26 Wed 08:40 hig"

8 多変数関数の微分

8.1 お奨め問題セレクション

1. 関数 $f(x,y)=x^2+y$ について, 等高線プロットを描こう. 3 次元プロット (鳥瞰図) を想像しよう (絵心のある人は描こう).
2. 関数 $f(x,y)=x^2+y$ について, $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)$ を求めよう.
3. 関数 $f(x,y)=x^5+3x^4y^2+y^4$ について, $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ を求めよう. [略解の一部分: $f_{xy}(x,y)=24x^3y$.]

8.2 方向微分

関数 $f(x,y)=x^2+y$ について, $(x,y)=(-1,1)$ における方向微分 $D_{\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}f(-1,1)$ を求めよう. [略解: $+1+\frac{\sqrt{3}}{2}$.]

8.3 多変数関数の合成微分

この問の答はぜんぜん簡単な形になりません.

1. $f(x,y)=x^2\mathrm{e}^{x+y}, \xi(t)=\cos t, \eta(t)=\sin t$ に対して, 合成関数 $z(t)=f(\xi(t),\eta(t))$ を考える. 多変数の合成関数の微分法を用いて, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ を求めよう.
2. $f(x,y)=x^5+3x^4y^2+y^4, \xi(u,v)=u\cos v, \eta(u,v)=u\sin v$ に対して, 合成関数 $z(u,v)=f(\xi(u,v),\eta(u,v))$ を考える. 多変数の合成関数の微分法を用いて, $\frac{\partial z}{\partial u}(u,v)$ を求めよう.

8.4 2 変数関数のグラフ

次の関数 $f(x,y)$ について, 等高線プロットを描こう. 3 次元プロット (鳥瞰図) を想像しよう (絵心のある人は描こう).

1. $f(x,y)=-x^2-\frac{1}{4}y^2$. [*Hint*: 等高線は楕円.]
2. $f(x,y)=-x^2+\frac{1}{4}y^2$.
3. $f(x,y)=y\mathrm{e}^x$

http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, tel:0775437501 数理情報学科へや:1 号館 5 階 508.

8.5　偏導関数

次の関数 $f(x,y)$ について, $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)$ を求めよう.

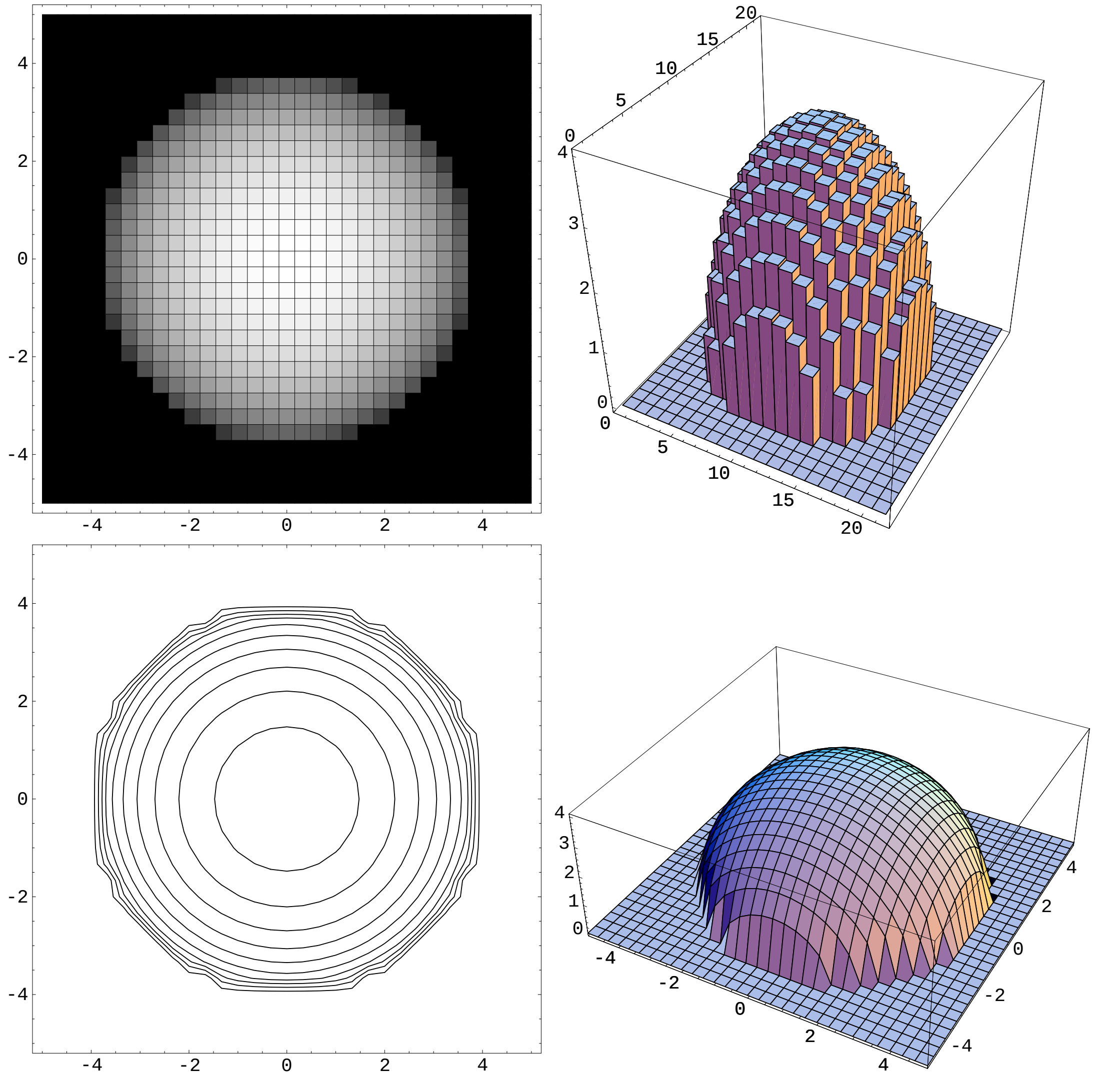
1. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$. [略解の一部: $f_x(-1,1)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$,$f_y(-1,1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$]
2. $f(x,y)=\sin((2x-3y)\pi)$
3. $f(x,y)=\mathrm{e}^{i\pi xy-\frac{1}{2}y^2}$

2 変数関数のグラフの例

以下のグラフは, Wolfram 社の数式処理ソフトウェアである *Mathematica* を用いて描きました. 描くのに用いたファイルは, `http://hig3.net` にあります.

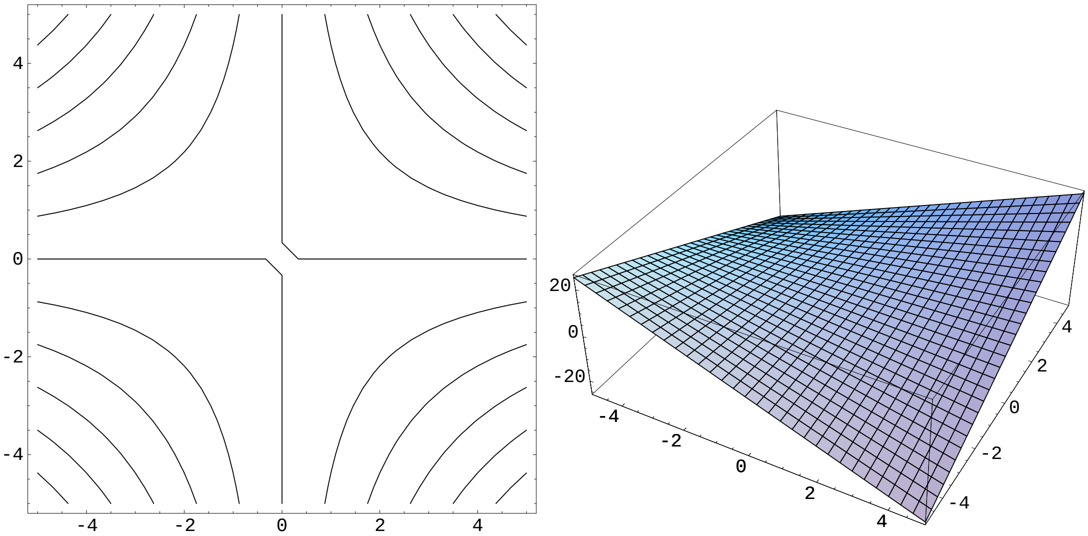
理工学部は *Mathematica* のサイトライセンスを取得しており, 計算機実習室の Windows, Linux で自由に使えます.

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{4^2-x^2-y^2} & (x^2+y^2\leqq 4^2)\\ 0 & (x^2+y^2>4^2)\end{cases} \tag{8.1}$$

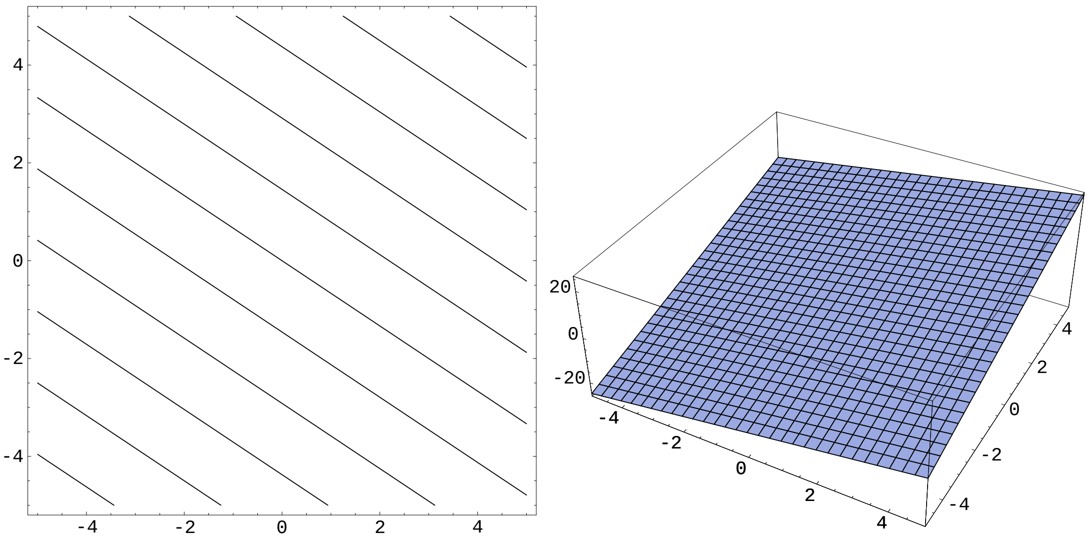


上左: 密度プロット. 上右: 降水量地図方式. 下左: 等高線プロット. 下右: 3 次元プロット (鳥瞰図).

$$f(x,y) = xy \tag{8.2}$$



$$f(x,y) = 2x + 3y \tag{8.3}$$



多変数関数の合成微分

ケース 1 定義域の変数が t

$f(x,y)$ 東経 x 北緯 y の標高.
$\xi(t)$ 登山者の, 時刻 t における東経
$\eta(t)$ 登山者の, 時刻 t における北緯
$z(t)=f(\xi(t),\eta(t))$ 登山者の, 時刻 t における標高.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & \overset{f}{\swarrow} & x & \overset{\xi}{\nwarrow} & \\
z & & & & t \\
 & \overset{f}{\nwarrow} & y & \overset{\eta}{\swarrow} &
\end{array}
$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} \tag{8.4}$$

証明:

$$
\begin{aligned}
&\frac{f(\xi(t+\Delta t),\eta(t+\Delta t))-f(\xi(t),\eta(t))}{\Delta t}\\
=&\frac{f(\xi(t+\Delta t),\eta(t+\Delta t))-f(\xi(t),\eta(t+\Delta t))}{\Delta t}+\frac{f(\xi(t),\eta(t+\Delta t))-f(\xi(t),\eta(t))}{\Delta t}\\
=&\frac{f(\xi(t+\Delta t),\eta(t+\Delta t))-f(\xi(t),\eta(t+\Delta t))}{\xi(t+\Delta t)-\xi(t)}\times\frac{\xi(t+\Delta t)-\xi(t)}{\Delta t}\\
&+\frac{f(\xi(t),\eta(t+\Delta t))-f(\xi(t),\eta(t))}{\eta(t+\Delta t)-\eta(t)}\times\frac{\eta(t+\Delta t)-\eta(t)}{\Delta t}
\end{aligned}
$$

平均値の定理を使うと, 極限で上の式が得られる.

ケース 2 定義域の変数が (u,v)

$f(x,y)$ 東経 x 北緯 y の標高.
$\xi(u,v)$ u Street v Avenue の東経.
$\eta(u,v)$ u Street v Avenue の北緯.
$z(u,v)=f(\xi(u,v),\eta(u,v))$ u Street v Avenue の標高.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & \overset{f}{\swarrow} & x & \overset{\overset{\xi}{\leftarrow}}{\nwarrow} & u \\
z & & & & \\
 & \overset{f}{\nwarrow} & y & \overset{\overset{\xi}{\swarrow}}{\leftarrow} & v
\end{array}
$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial u}, \tag{8.5}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial v} \tag{8.6}$$

証明: 同様です.