微積分◇演習 (情報メディア学科 1 年次科目)

樋口さぶろお[1] 配布: 2004/01/14 Wed 更新: Time-stamp: "2004/01/15 Thu 12:51 hig"

13 多重積分の変数変換と座標系

13.1 お奨め問題

1. $(x, y) = (-1, -\sqrt{3})$ を極座標 (r, θ) で表そう. $(r, \theta) = (1, \frac{1}{6}\pi)$ を直交座標で表そう.
2. 次の直交座標 (x, y) で書かれた定積分を, 変数変換で極座標 (r, θ) に移ることによって求めよう. $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y, D = \{(x, y) | 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4\}$.
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ を利用して, 定積分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\, \mathrm{d}x$ ($a > 0$ は定数) を求めよう.

13.2 極座標での積分

次の直交座標 (x, y) で書かれた定積分を, 変数変換で極座標 (r, θ) に移ることによって求めよう.

1. $\iint_D x\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y, D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leqq 1, x \geqq 0, y \geqq 0\}$.
2. $\iint_D y\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y, D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leqq 1, y \geqq |x|\}$.
3. $\iint_D \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y, D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leqq 1\}$.

13.3 一般の変数変換とヤコビアン

次の直交座標 (x, y) で書かれた定積分を, 適当な変数変換で求めよう.

1. $\iint_D x\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y, D = \{(x, y) | 0 \leqq x - y \leqq 1, 0 \leqq x + y \leqq 1\}$.
2. $\iint_D (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D = \{(x, y) | (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 \leqq 1\}$.
3. $\iint_D (x + y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y, D = \{(x, y) | 0 \leqq x + y \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1\}$.

`http://hig3.net/`(講義のページもここからたどれます), `http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/`, `mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp`, `tel:0775437501` 数理情報学科へや:1 号館 5 階 508.

13.4　ガウス積分

ガウス積分の公式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ を利用して, 次の定積分を求めよう. *Hint.* $-ax^2+bx+c$ を平方完成して変数変換.

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$. ($a>0, b, c$ は定数)
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$. ($a>0, b, c$ は定数)

13.5　3 重積分と球座標

1. 直交座標 (x,y,z) で書かれた定積分 $\displaystyle\iiint_D z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, D=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \leqq a^2\}$, $a>0$ は定数, を, 変数変換で球座標 (r,θ,ϕ) に移ることによって求めよう.
2. 直交座標 (x,y,z) で書かれた定積分 $\displaystyle\iiint_D xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, D=\{(x,y,z)|x^2+y^2 \leqq 1, 0\leqq x, 0\leqq z\leqq 1\}$ を, (x,y) のみ平面極座標 (r,θ) に移ることによって求めよう (これを円柱座標という).