微積分◇演習秋のプチテスト (情報メディア学科 1 年次科目)

樋口さぶろお[1] 配布: 2003 年 10 月 22 日更新: Time-stamp: "2003/10/29 Wed 08:49 hig"

注意

1. 出席チェックのときに学生証を見せてね.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

関数 $f(x) = 2\mathrm{e}^{-(x-1)}$ のグラフを描こう.

2

$f(x) = 2\sin(\frac{\pi}{2}x)$ ただし定義域を $-1 \leqq x \leqq +1$ とする.

1. $f(x)$ の値域を求めよう.
2. 逆関数 $f^{-1}(x)$ の式と, 定義域, 値域を求めよう.
3. $f^{-1}(1)$ を求めよう.
4. 関数 $f(x), f^{-1}(x)$ のグラフを描こう.

3

複素数 $z_1 = 3\mathrm{e}^{\frac{3}{4}\pi i}, z_2 = \mathrm{e}^{2+\frac{23}{12}\pi i}$ に対して次の数を求めよう.

1. $\mathrm{Re}\, z_1, \mathrm{Im}\, z_1$.
2. $|z_1 z_2|, \mathrm{Arg}(z_1 z_2)$.
3. $\mathrm{Re}(z_1 z_2), \mathrm{Im}(z_1 z_2)$.

4

$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ に対して, z^{100} の実部虚部を求めよう.

5

次の極限を求めよう. ただし, $\pm\infty$ の場合や極限が存在しない場合は, そのように答えよう.

1. $\displaystyle\lim_{x\to-2} \frac{x^2-2x-8}{x^2-4}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^2}{4x^2+x}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{(-3+i)x}$.
4. $\displaystyle\lim_{x\to0-0} \mathrm{e}^{\frac{1}{x^3}}$.

http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, tel:0775437501 数理情報学科へや:1 号館 5 階 508.

1

$y = \mathrm{e}^x$ のグラフを y 軸に関して対称変換, y 軸の方向に 2 倍したあと, x の向きに $+1$ 平行移動したもの.

2

1. 値域は $-2 \leqq y \leqq +2$
2. $y = 2\sin(\frac{\pi}{2}x)$ とおいて x について解くと, $x = \frac{2}{\pi}\operatorname{Arcsin}\frac{y}{2}$. よって, $f^{-1}(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{Arcsin}\frac{x}{2}$. 定義域は $-2 \leqq x \leqq +2$, 値域は $-1 \leqq y \leqq +1$.
3. $f^{-1}(1) = \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}$
4. $y = f(x)$ のグラフは, $\sin x$ のグラフを x 軸の方向に $\frac{2}{\pi}$ 倍, y 軸の方向に 2 倍したもの. $y = f^{-1}(x)$ のグラフは, $y = f(x)$ のグラフを $y = x$ に関して対称変換したもの.

3

1. $\operatorname{Re} z_1 = 3\cos\frac{3}{4}\pi = -\frac{3}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{Im} z_1 = 3\cos\frac{3}{4}\pi = +\frac{3}{\sqrt{2}}$.
2. $\mathrm{e}^{2\pi i} = 1$ に注意すると, $z_1 z_2 = 3\mathrm{e}^2\mathrm{e}^{\frac{32}{12}\pi i} = 3\mathrm{e}^2\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi i}$ よって, $|z_1 z_2| = 3\mathrm{e}^2$, $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \frac{2}{3}\pi$.
3. $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = 3\mathrm{e}^2\cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{3}{2}\mathrm{e}^2$, $\operatorname{Im}(z_1 z_2) = 3\mathrm{e}^2\sin\frac{2}{3}\pi = +\frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^2$.

4

極形式では $z = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}\pi i}$. よって, $z = (\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\pi i})^{100} = \mathrm{e}^{\frac{100}{3}\pi i} = \mathrm{e}^{\frac{4}{3}\pi i}$ ここで, $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathrm{e}^{2n\pi i} = 1$ であることを用いた. 結局, $\operatorname{Re}(z^{100}) = -\frac{1}{2}, \operatorname{Im}(z^{100}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5

1. $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x-4}{x-2} = \frac{3}{2}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{1}{x}} = \frac{1}{4}$.
3. $-\mathrm{e}^{-3x} \leqq \mathrm{e}^{-3x}\cos x \leqq +\mathrm{e}^{-3x}$, $-\mathrm{e}^{-3x} \leqq \mathrm{e}^{-3x}\sin x \leqq +\mathrm{e}^{-3x}$ および, $\pm\mathrm{e}^{-3x} \to 0(x \to +\infty)$ よりはさみうちの原理で $\mathrm{e}^{(-3+i)x} \to 0$.
4. $\frac{1}{x}^3 \to -\infty(x \to 0-0)$ より, $\mathrm{e}^{\frac{1}{x^3}} \to 0$.