微積分◇演習冬のプチテスト　(情報メディア学科 1 年次科目)

樋口さぶろお[1]　配布: 2003 年 12 月 04 日更新: Time-stamp: "2003/12/11 Thu 08:40 hig"

注意

1. 出席チェックのときに学生証を見せてね.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.
4. すべての問で $x, y \in \mathbb{R}$ です.
5. 外部記憶ペーパー作成 10 分 + 答案作成 80 分

1

1. 関数 $f(x) = \cos(x^2)$ の導関数 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$ を求めよう.
2. 関数 $f(x) = \sqrt{1 + \mathrm{e}^{2x}}$ の導関数 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$ を求めよう.
3. 関数 $f(x) = x^3\mathrm{e}^{2x}$ に対して, $\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(1)$ を求めよう.
4. 関数 $f(x, y) = x^2y - y^3$ について, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ を求めよう.
5. 関数 $f(x, y) = x^2y - y^3$, $\xi(t) = \cos t, \eta(t) = \sin t$ とする. 合成関数 $z(t) = f(\xi(t), \eta(t))$ について, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ を求めよう.

2

1. 関数 $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ の $x = 1$ のまわりのテイラー級数を求めよう. 必要なら, 指数関数 e^x のマクローリン級数は導かないで使ってもよい.
2. 関数 $f(x) = \frac{1}{3-x-x^2}$ の 2 次のマクローリン展開を求めよう. 剰余項はランダウの記号を用いて書こう.
3. 関数 $f(x, y) = \log(1 + x + y)$ について, $(x, y) = (1, 1)$ のまわりの 2 次のテイラー展開を求めよう. 剰余項は R_3 と書いてよい.

3

関数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$ を考える.

1. $f(x)$ の $x = 0$ のまわりの 2 次のテイラー展開を求めよう.
2. 上で求めたテイラー展開で, 剰余項 $R_3(x)$ を, パラメター $0 < \theta < 1$ を使って書き表そう.
3. 上で求めたテイラー展開を利用して, $\frac{1}{\sqrt{1.2}}$ の近似値と, 誤差 (演習で求めたような, 最悪の場合の誤差) を求めよう.

4

関数 $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 4x - y$ を考える.

1. $f_x(x, y) = 0$ かつ $f_y(x, y) = 0$ となるような点 (x, y) を (複数あればすべて) 求めよう.
2. この点のまわりの 2 次のテイラー展開をもとめよう. 剰余項は R_3 と書いてよい.
3. この点が極大であるか, 極小であるか, 鞍点である (極大でも極小でもない) か決定しよう.

---

http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/,
mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, tel:0775437501 数理情報学科へや:1 号館 5 階 508.

微積分◇演習冬のプチテスト (略解)　(情報メディア学科 1 年次科目)

樋口さぶろお[2]　配布: 2003 年 12 月 04 日更新: Time-stamp: "2003/12/11 Thu 08:40 hig"

1

1. 合成微分の法則を用いて, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = -\sin(x^2)\times 2x$.
2. 合成微分の法則を用いて, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}$.
3. ライプニッツの公式より, $\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(x) = 1\times 3\cdot 2\cdot 1\times \mathrm{e}^{2x} + 3\times 3\cdot 2x \times 2\mathrm{e}^{2x} + 3\times 3x^2\times 2^2\mathrm{e}^{2x} + 1\times x^3\times 2^3\mathrm{e}^{2x}$. よって, $\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(1) = 86\mathrm{e}^2$.
4. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - 3y^2$.
5. 2 変数関数の合成微分の法則より,
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} = 2\xi\eta\cdot(-\sin t) + (\xi^2 - 3\eta^2)\cdot(\cos t) = -5\cos t\sin^2 t + \cos^3 t.$$

2

1. $\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-2(x-1)-2} = \mathrm{e}^{-2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}[(-2)(x-1)]^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2}(-2)^k}{k!}(x-1)^k$. テイラー展開の一般の式を用いてもよい.
2. 等比級数の公式を利用して, $\frac{1}{3-(x+x^2)} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{x+x^2}{3}} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{x+x^2}{3})^k = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}x + \frac{4}{27}x^2 + O(x^3)$.
3. $f_x(x,y) = f_y(x,y) = \frac{1}{1+x+y}$, $f_{xx}(x,y) = f_{xy}(x,y) = f_{yy}(x,y) = -\frac{1}{(1+x+y)^2}$ より,
$$f(x,y) = \log 3 + \tfrac{1}{3}(x-1) + \tfrac{1}{3}(y-1) + \tfrac{1}{2!}[-\tfrac{1}{9}(x-1)^2 + \tfrac{2}{9}(x-1)(y-1) + \tfrac{1}{9}(y-1)^2] + R_3.$$
または, $\log(3+(x-1)+(y-1)) = \log 3 + \log(1+\frac{(x-1)+(y-1)}{3}) = \log 3 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{(x-1)+(y-1)}{3}\right)^k$.

3

1. $f(x) = 1 - x + \frac{3}{2}x^2 + R_3(x)$.
2. $R_3(x) = -\frac{15}{3!}\frac{1}{(1+2\theta x)^{7/2}}x^3$.
3. $\frac{1}{\sqrt{1.2}} = f(0.1) = 1 - 0.1 + 0.015 + R_3(x) = 0.915 + R_3(x)$. 剰余項の絶対値 $|R_3(0.1)|$ が最大となるのは, $\theta \to 0$ のときで, $|R_3(0.1)| < \frac{15}{3!}\frac{1}{1}\cdot 0.1^3 = 0.0025$. なお, $1/\sqrt{1.2} = 0.912871\ldots$

4

1. $f_x(x,y) = 2x - y - 4 = 0$, $f_y(x,y) = -x + 2y - 1 = 0$ を連立させて解いて, $(x,y) = (3,2)$.
2. $f_{xx}(x,y) = 2$, $f_{xy}(x,y) = -1$, $f_{xy}(x,y) = 2$ より,
$$f(3+h, 2+k) = -7 + 0\cdot h + 0\cdot k + \tfrac{1}{2!}(2h^2 - 2\cdot 1\cdot hk + 2k^2) + R_3 = -7 + (h - \tfrac{k}{2})^2 + (1 - \tfrac{1}{4})k^2 + R_3.$$
3. 上の平方完成の結果より, $(3+h, 2+k)$ が $(3,2)$ に近いとき $f(3+h,2+k) > f(3,2) = -7$ で, $f(x,y)$ は $(3,2)$ で極小値 -7 をとる.

http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/,
mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, tel:0775437501 数理情報学科へや:1 号館 5 階 508.

冬のプチテスト 講評と樋口の感想

1

基本の問題ばかりです．よくできていました．

1. 合成微分の基本的な問題です．$f(y)=\cos(y), g(x)=x^2$ の $f(g(x))$ と思いましょう．
2. 2003/11/05 の quiz の類題．$\sqrt{f(x)}$ は，$(f(x))^{1/2}$ と思って，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^\alpha=\alpha x^{\alpha-1}$ を機械的に適用したほうがよい．
3. 2003/10/30 の quiz の類題．ライプニッツの公式を使わないで答を求めるのには，人並み外れた集中力が必要です．
4. 偏微分の基本的な問題です．
5. 演習問題 8.3.1 の類題．問題は，t の関数 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$ を求めてねと言っているので，最後に，x, y (あるいは ξ, η) に $\cos t, \sin t$ をいれて，t の関数として答える必要があります．

2

1. テイラー展開の基本的な問題です．高階導関数は，

   $$f^{(j)}(x)=(-2)^j\mathrm{e}^{-2x} \quad \text{より} \quad f^{(j)}(1)=(-2)^j\mathrm{e}^{-2}. \tag{1}$$

   よって，テイラー級数は，

   $$f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-2)^j\mathrm{e}^{-2}}{j!}(x-1)^j. \tag{2}$$

   (テイラー展開でなく) テイラー級数と言ったときには，$n\to\infty$ として，$R_{n+1}(x)\to 0$ となった後の等式を言うので，剰余項が書いてあるのは厳密には誤りです．
2. 2003/11/19 の quiz の類題．そのままマクローリン展開の公式を適用しても何とかできるでしょう．なお，

   $$\frac{1}{1-(-2+x+x^2)}=\sum_{j=0}^{\infty}(-2+x+x^2)^j \tag{3}$$

   という変形は，$|-2+x+x^2|<1$ のとき正しいが，ここから $x=0$ のまわりのマクローリン展開を出すのは困難です．なぜなら，j がどんなに大きい項からも，$O(x^0)$ や $O(x^1)$ の項が出てくるから．等比級数の和の形 $1/(1-f(x))=\sum_j(f(x))^j$ を利用するには，x が小さいとき $f(x)$ が小さいような形に持っていかないといけない．
3. 演習問題 9.2.1 の類題．$x=y=1$ のまわりのテイラー展開なので，f_x, f_{xy} などに $x=y=1$ を代入して係数を決めることに注意．また，巾は $(x-1)^n(y-1)^m$ となる．

3

演習問題 7.1.1 の類題です．

1. $1/\sqrt{1+2x}$ は，$1/g(x)$ と思って商の微分法を使うのは苦難の道です．$(1+2x)^{-1/2}$ と思って $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^\alpha=\alpha x^{\alpha-1}$ を使ったほうがいいです．

2. ごめんなさい. 配布した解答にミスプリントがあります. $R_3(x) = -\frac{15}{3!}\frac{1}{(1+2\theta x)^{7/2}}x^3$ です.
   剰余項の式の中に出てくる $f^{(n+1)}(\theta x)$ は, $f^{(n+1)}(x) \times (\theta \cdot x)$ ではなく, $f^{(n+1)}(x)$ の x に $c = \theta x$ を代入したものであることに注意.
3. パラメター θ は, $0 < \theta < 1$ のどのような値をとるかわかりません. したがって, 誤差の大きさは, $0 < \theta < 1$ の範囲で θ を動かしたときの $R_3(x)$ の値のいずれかです. 最悪の場合は, そのうち絶対値が最大になる場合です. 今の場合, 分母の $(1 + \theta \times 0.1)$ が最小となるとき $|R_3(0.1)|$ は最大になるので, $\theta \to 0$ が最悪の場合です.

4

演習問題 9.1 の類題です.

1. 基本的な偏微分と, 連立 1 次方程式です.
2. ごめんなさい. 配布した解答にミスプリントがあります. $-x + 2y - 1 = 0$ です.
3. 極大極小などを判定するには, 2 次の項を $\pm(h, k$ の 1 次式$)^2 \pm (h, k$ の 1 次式$)^2$ の形に持っていきます. せっかく, $f(3 + h, 2 + k) = -7 + (h - \frac{k}{2})^2 + (1 - \frac{1}{4})k^2$ の形まで持っていきながら, 鞍点と答えてる人が多くいて残念でした. (h, k) が $(0, 0)$ からどうずれても, 必ず f は大きくなるので, 極小です.