微積分♪演習 ファイナルトライアル

樋口さぶろお[1]　配布: 2005 年 01 月 26 日更新: Time-stamp: "2005/01/27 Thu 12:01 hig"

注意

1. **全部で 6 問. 答案用紙の 1 面に 1 問ずつ解答してね.**
2. **外部記憶ペーパー作成 10 分 + 答案作成 80 分です.**
3. 出席チェックのときに学生証を見せてね.
4. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
5. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.
6. すべての問で $x, y, a, b, t \in \mathbb{R}$ です.
7. 必要なら, 関数 e^x, 関数 $\frac{1}{1-x}$ の $x = 0$ におけるテイラー級数は, 導かないで使ってもいいです.
8. 外部記憶ペーパー作成 10 分 + 答案作成 80 分.

1

1. 関数 $f(x) = 1 - \mathrm{e}^{x^2}$ の, $x = 0$ における 2 次のテイラー展開を求めよう. 剰余項はランダウの記号で書こう.
2. 関数 $g(x) = x\sin(2x)$ の, $x = 0$ における 2 次のテイラー展開を求めよう. 剰余項はランダウの記号で書こう.
3. 極限

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{1.1}$$

は, $\frac{0}{0}$ の不定形である. 上で求めたテイラー展開を利用して, 極限の値を求めよう.

2

関数 $f(x, y) = (x + y^2)\mathrm{e}^{-2x}$ の, $(x, y) = (0, 1)$ における 2 次のテイラー展開を求めよう. 剰余項は, R_3 とだけ書けばよい.

3

次の定積分 (広義積分も含む) を求めよう.

1. $\displaystyle\int_0^1 \sin(\pi(x + 1))\,\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int_0^6 (2 \times |x - 3| - 1)\,\mathrm{d}x.$ (グラフから図形的に求めてもよい)

`http://hig3.net/`(講義のページもここからたどれます), `http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/`, `mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp`, `tel:0775437501` 数理情報学科へや:1 号館 5 階 508.

3. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. ($t=x^2$ とおいて置換積分を用いてもよい)
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\cdot \mathrm{e}^{-5x}\,\mathrm{d}x$. (部分積分を用いてもよい)

4

次の定積分 (広義積分も含む) を求めよう.

1. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-i\pi nx}\,\mathrm{d}x$. ($n\in\mathbb{Z}$)
2. $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} (1-x^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$. (ガウス積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ の公式は理由なしに使ってよい)

5

1. 直交座標 (x,y) で書かれた 2 重積分

$$I_1=\iint_{D_1} x\,\mathrm{d}S \qquad D_1=\{(x,y)|-1\leqq x\leqq 3, 2\leqq y\leqq 4\}$$

   の値を求めよう.
2. 直交座標 (x,y) で書かれた 2 重積分

$$I_2=\iint_{D_2} (x^2-xy^2)\,\mathrm{d}S \qquad (D_2 \text{ は } (0,1),(0,0),(-2,1) \text{ を 3 頂点とする 3 角形の内部})$$

   の値を求めよう.

6

直交座標 (x,y) で書かれた 2 重積分

$$I=\iint_D y\,\mathrm{d}S, \qquad D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqq 9, x<y\}$$

考える.

1. 積分領域 D を図示しよう.
2. 重積分 I を極座標 (r,θ) を用いて書き直そう. ヤコビアンは公式を用いてよい.
3. 変数 r,θ についての 2 重積分を計算し, I の値を求めよう.

点数のお知らせ

各自の点数は, 生協メール (アドレス `t040nnnx@ryukoku-u.jp`) で個別にお知らせします. ここに届いたメールは, Web ページ `http://www.seikyou.ne.jp/ryukoku/` で見られます.

微積分♪演習ファイナルトライアル (略解) (情報メディア学科 1 年次科目)

樋口さぶろお[2] 配布: 2005 年 01 月 26 日更新: Time-stamp: "2005/01/27 Thu 12:01 hig"

1

1. $\mathrm{e}^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+O(x^3)$ に注意すると, $f(x) = 1-(1+x^2+\frac{1}{2}(x^2)^2+O((x^2)^3) = -x^2+O(x^4)$.
2. $\sin x = \frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix}) = x-\frac{1}{3!}x^3+O(x^5)$ に注意すると, $g(x) = x(2x-\frac{1}{3!}(2x)^3+O(x^5)) = 2x^2+O(x^4)$.
3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-x^2+O(x^4)}{2x^2+O(x^4)} = \frac{-1+O(x^2)}{+2+O(x^2)} = -\tfrac{1}{2}. \tag{1.1}$$

2

$$f(x,y) = (x+y^2)\mathrm{e}^{-2x}, \qquad f(0,1) = 1, \tag{2.1}$$
$$f_x(x,y) = (1-2x-2y^2)\mathrm{e}^{-2x}, \qquad f_x(0,1) = -1, \tag{2.2}$$
$$f_y(x,y) = (2y)\mathrm{e}^{-2x}, \qquad f_y(0,1) = 2, \tag{2.3}$$
$$f_{xx}(x,y) = (-2+(-2)(1-2x-2y^2))\mathrm{e}^{-2x}, \qquad f_{xx}(0,1) = 0, \tag{2.4}$$
$$f_{xy}(x,y) = -4y\mathrm{e}^{-2x}, \qquad f_{xy}(0,1) = -4, \tag{2.5}$$
$$f_{yy}(x,y) = 2\mathrm{e}^{-2x}, \qquad f_{yy}(0,1) = 2. \tag{2.6}$$

2 次のテイラー展開の公式を用いて,

$$f(x,y) = 1+(-1)\cdot(x-0)+2\cdot(y-1)+\tfrac{1}{2!}(0\cdot(x-0)^2+2\cdot(-4)\cdot(x-0)(y-1)+2(y-1)^2)+R_3. \tag{2.7}$$

3

1. $\int_0^1 \sin(\pi(x+1))\,\mathrm{d}x = [-\frac{1}{\pi}\cos(\pi(x+1))]_0^1 = -\frac{2}{\pi}$.
2. 図より, $(\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times 5-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1)\times 2 = 12$. あるいは, $\int_0^6(-1)\mathrm{d}x$ と, $\int_0^6 2|x-3|\mathrm{d}x$ をわけて, それぞれ面積を考えた方が楽かも.
3. $t = x^2$ とおいて置換積分すると,

$$\int_0^4 \frac{1}{1+t}\frac{1}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\ln|1+t|\right]_0^4 = \frac{1}{2}\ln 5 \tag{3.1}$$

4. 広義積分なので

$$I(R) = \int_0^R x\ \mathrm{e}^{-5x}\ \mathrm{d}x \tag{3.2}$$

`http://hig3.net`(講義のページもここからたどれます), `http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/`, `mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp`, `tel:0775437501` 数理情報学科へや:1 号館 5 階 508.

とおいて調べる. 部分積分により,

$$I(R) = \left[-\tfrac{1}{5}x\mathrm{e}^{-5x}\right]_0^R - \int_0^R -\tfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-5x}\mathrm{d}x = (-\tfrac{1}{5}R\mathrm{e}^{-5R}-0) - \left[\tfrac{1}{25}\mathrm{e}^{-5x}\right]_0^R = (-\tfrac{1}{5}R\mathrm{e}^{-5R}-0) - \tfrac{1}{25}(\mathrm{e}^{-5R}-1). \tag{3.3}$$

よって, $\lim_{R\to\infty} I(R) = \frac{1}{25}$.

4

1.

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-i\pi nx}\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_0^1 \mathrm{d}x = 1, & (n=0) \\ \frac{1}{-i\pi n}(\mathrm{e}^{-i\pi n}-1) = \frac{2}{i\pi n}, & (n\,\text{が奇数}) \\ \frac{1}{-i\pi n}(\mathrm{e}^{-i\pi n}-1) = 0. & (n\,\text{が偶数}, n \neq 0) \end{cases} \tag{4.1}$$

2. $x = \sin t$ とおいて置換積分すると, $\int_0^{\frac{1}{4}\pi}(1-\sin^2 t)^{-1/2}\cos t\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{4}\pi}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{4}\pi$.
3. $\frac{1}{\sqrt{2}}x = t$ とおくと, ガウス積分の公式が使えて,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\sqrt{2}\ \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}. \tag{4.2}$$

5

1.

$$I_1 = \int_2^4 \left\{ \int_{-1}^3 x\ \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}y = \int_2^4 \left[\tfrac{1}{2}x^2 y\right]_{-1}^3\ \mathrm{d}y = \int_2^4 4\ \mathrm{d}y = [4y]_2^4 = 8. \tag{5.1}$$

2.

$$I_2 = \int_0^1 \left\{ \int_{-2y}^{0} (x^2 - xy^2)\mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}y = \frac{16}{15}. \tag{5.2}$$

または,

$$I_2 = \int_{-2}^0 \left\{ \int_{-\frac{1}{2}x}^{1} (x^2 - xy^2)\mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x \tag{5.3}$$

からも計算できる.

6

1.
2. $\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta$ より,

$$I = \int_0^3 \mathrm{d}r \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \mathrm{d}\theta\ r^2 \sin\theta. \tag{6.1}$$

3.

$$I = \int_0^3 r^2\ \mathrm{d}r \times \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta = 9\sqrt{2}. \tag{6.2}$$