微積分♪演習 (情報メディア学科 1 年次科目)

樋口さぶろお[1] 配布: 2004/11/17 Wed 更新: Time-stamp: "2004/11/18 Thu 21:19 hig"

8 多変数関数の微分

8.1 お奨め問題セレクション

1. 関数 $f(x,y) = x^2 + y$ について, 等高線プロットを描こう. 3 次元プロット (鳥瞰図) を想像しよう (絵心のある人は描こう).
2. 関数 $f(x,y) = x^2 + y$ について, $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)$ を求めよう.
3. 関数 $f(x,y) = x^5 + 3x^4y^2 + y^4$ について, $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ を求めよう. [略解の一部分: $f_{xy}(x,y) = 24x^3y$.]

8.2 方向微分

関数 $f(x,y) = x^2 + y$ について, $(x,y) = (-1,1)$ における方向微分 $D_{\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} f(-1,1)$ を求めよう. [略解: $+1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.]

8.3 多変数関数の合成微分

1. $f(x,y) = x^2 + y, \xi(t) = \cos t, \eta(t) = \sin t$ に対して, 合成関数 $z(t) = f(\xi(t), \eta(t))$ を考える. 多変数の合成関数の微分法を用いて, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)$ を求めよう.
2. $f(x,y) = x^2 + y, \xi(u,v) = u\cos v, \eta(u,v) = u\sin v$ に対して, 合成関数 $z(u,v) = f(\xi(u,v), \eta(u,v))$ を考える. 多変数の合成関数の微分法を用いて, $\frac{\partial z}{\partial u}(u,v)$ を求めよう.

8.4 偏導関数

次の関数 $f(x,y)$ について, $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)$ を求めよう.

1. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. [略解の一部: $f_x(-1,1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,$f_y(-1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$]
2. $f(x,y) = \sin((2x-3y)\pi)$
3. $f(x,y) = \mathrm{e}^{i\pi xy - \frac{1}{2}y^2}$

`http://hig3.net/`(講義のページもここからたどれます), `http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/`, `mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp`, `tel:0775437501` 数理情報学科へや:1 号館 5 階 508.

8.5　2 変数関数のグラフ

次の関数 $f(x,y)$ について, 等高線プロットを描こう. 3 次元プロット (鳥瞰図) を想像しよう (絵心のある人は描こう).

1. $f(x,y) = -x^2 - \frac{1}{4}y^2$. [*Hint*: 等高線は楕円.]
2. $f(x,y) = -x^2 + \frac{1}{4}y^2$.
3. $f(x,y) = y\mathrm{e}^x$.

講義の動画ストリーミング

実習室や自宅で, Web 上で講義の録画を見られます. 自宅で再生するには, Realplayer をインストールします (Web の再生案内のところに書いてあります). また, 自宅では次が必要です.
UserID　Password

冬のプチテストやります！

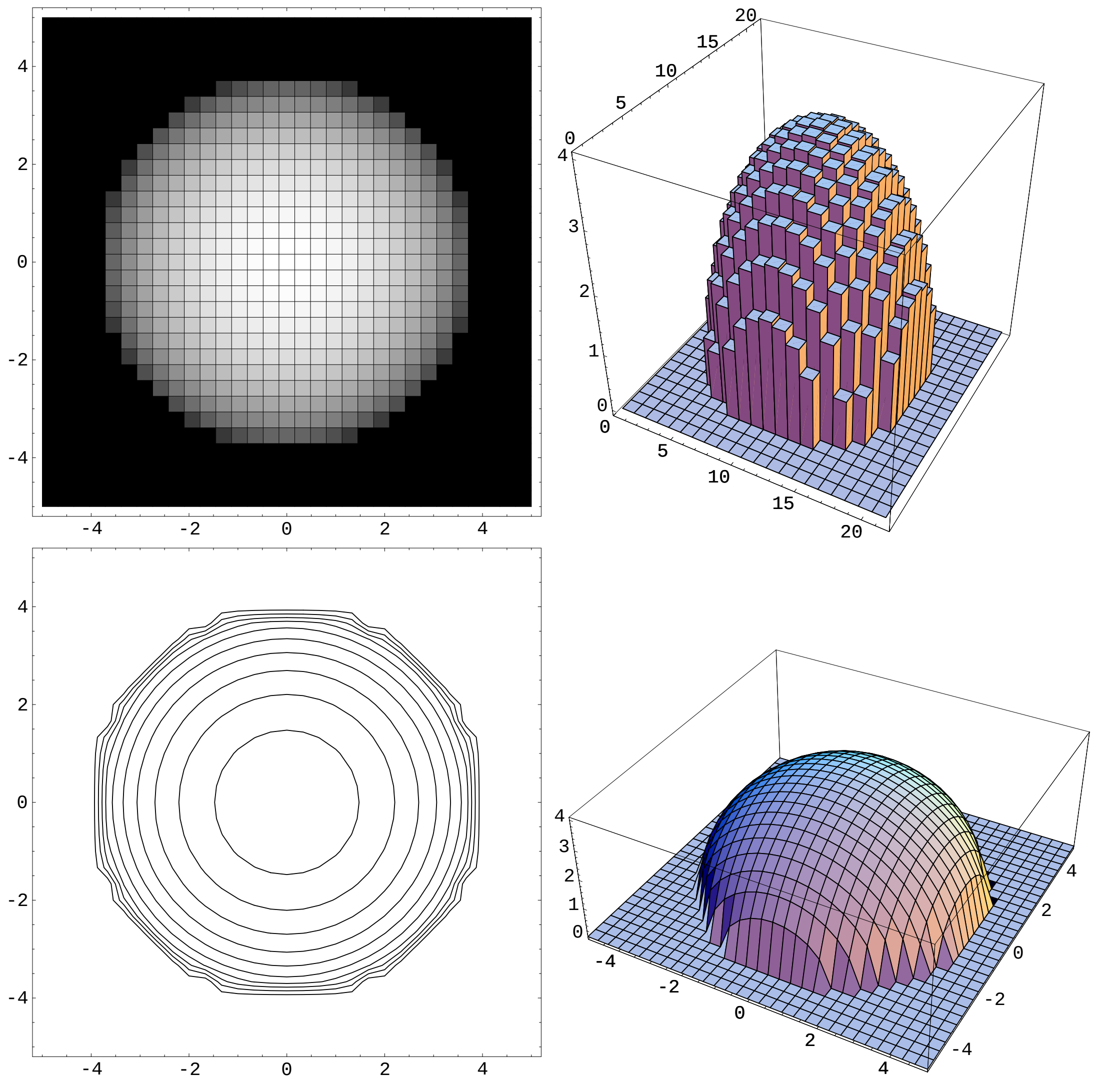
12 月 01 日 (水). 25 点分です. 掲示と Web 参照.

2 変数関数のグラフの例

以下のグラフは, Wolfram 社の数式処理ソフトウェアである *Mathematica* を用いて描きました. 描くのに用いたファイルは, `http://hig3.net` にあります.

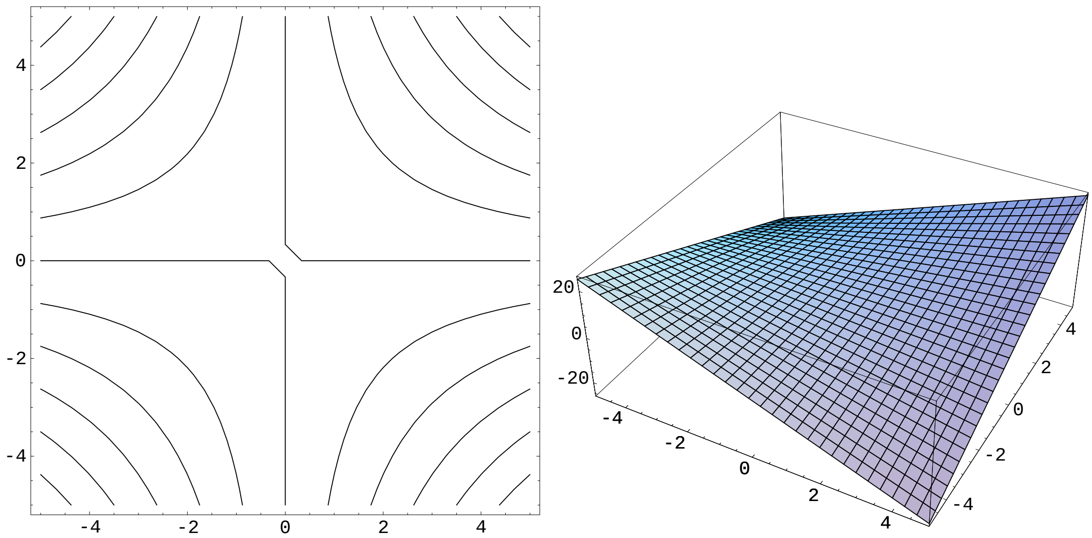
理工学部は *Mathematica* のサイトライセンスを取得しており, 計算機実習室の Windows, Linux で自由に使えます.

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{4^2 - x^2 - y^2} & (x^2 + y^2 \leqq 4^2) \\ 0 & (x^2 + y^2 > 4^2) \end{cases} \tag{8.1}$$

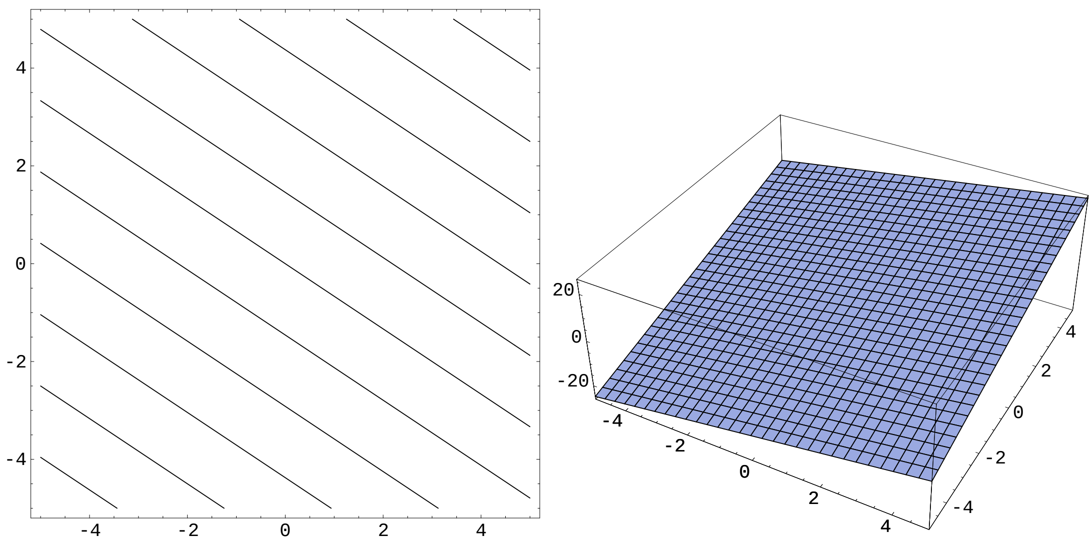


上左: 密度プロット. 上右: 降水量地図方式. 下左: 等高線プロット. 下右: 3 次元プロット (鳥瞰図).

$$f(x, y) = xy \tag{8.2}$$



$$f(x, y) = 2x + 3y \tag{8.3}$$



多変数関数の合成微分

ケース 1 定義域の変数が t

$f(x,y)$ 東経 x 北緯 y の標高.
$\xi(t)$ 登山者の, 時刻 t における東経
$\eta(t)$ 登山者の, 時刻 t における北緯
$z(t) = f(\xi(t),\eta(t))$ 登山者の, 時刻 t における標高.

$$\begin{array}{ccccc} & \overset{f}{\swarrow} & x & \overset{\xi}{\nwarrow} & \\ z & & & & t \\ & \overset{f}{\nwarrow} & y & \overset{\eta}{\swarrow} & \end{array}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} \tag{8.4}$$

証明:

$$\begin{aligned}
&\frac{f(\xi(t+\Delta t),\eta(t+\Delta t)) - f(\xi(t),\eta(t))}{\Delta t} \\
=&\frac{f(\xi(t+\Delta t),\eta(t+\Delta t)) - f(\xi(t),\eta(t+\Delta t))}{\Delta t} + \frac{f(\xi(t),\eta(t+\Delta t)) - f(\xi(t),\eta(t))}{\Delta t} \\
=&\frac{f(\xi(t+\Delta t),\eta(t+\Delta t)) - f(\xi(t),\eta(t+\Delta t))}{\xi(t+\Delta t)-\xi(t)} \times \frac{\xi(t+\Delta t)-\xi(t)}{\Delta t} \\
&+ \frac{f(\xi(t),\eta(t+\Delta t)) - f(\xi(t),\eta(t))}{\eta(t+\Delta t)-\eta(t)} \times \frac{\eta(t+\Delta t)-\eta(t)}{\Delta t}
\end{aligned}$$

平均値の定理を使うと, 極限で上の式が得られる.

ケース 2 定義域の変数が (u,v)

$f(x,y)$: 東経 x, 北緯 y の標高.
$\xi(u,v)$: u Street, v Avenue の東経.
$\eta(u,v)$: u Street, v Avenue の北緯.
$z(u,v) = f(\xi(u,v),\eta(u,v))$: u Street, v Avenue の標高.

$$\begin{array}{ccccc} & \overset{f}{\swarrow} & x & \overset{\overset{\xi}{\leftarrow}}{\nwarrow} & u \\ z & & & & \\ & \overset{f}{\nwarrow} & y & \overset{\overset{\xi}{\swarrow}}{\leftarrow} & v \end{array}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial u}, \tag{8.5}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial v} \tag{8.6}$$

証明: 同様です.