微積分♪演習 (情報メディア学科 1 年次科目)

樋口さぶろお[1] 配布: 2004/01/13 Wed 更新: Time-stamp: "2005/01/11 Tue 18:13 hig"

13 多重積分の変数変換と座標系

13.1 お奨め問題

1. $(x,y)=(-1,-\sqrt{3})$ を極座標 (r,θ) で表そう. $(r,\theta)=(1,\frac{1}{6}\pi)$ を直交座標で表そう.
2. 次の直交座標 (x,y) で書かれた定積分を, 変数変換で極座標 (r,θ) に移ることによって求めよう. $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad D=\{(x,y)|1\leqq x^2+y^2\leqq 4\}$.
3. 公式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$ と置換積分 $t=\sqrt{a}\,x$ を利用して, 定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x$ ($a>0$ は定数) を求めよう.

13.2 極座標での積分

次の直交座標 (x,y) で書かれた定積分を, 変数変換で極座標 (r,θ) に移ることによって求めよう.

1. $\displaystyle\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqq 1, x\geqq 0, y\geqq 0\}$.
2. $\displaystyle\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqq 1, y\geqq |x|\}$.
3. $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqq 1\}$.

13.3 一般の変数変換とヤコビアン

次の直交座標 (x,y) で書かれた定積分を, 適当な変数変換で求めよう.

1. $\displaystyle\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad D=\{(x,y)|0\leqq x-y\leqq 1, 0\leqq x+y\leqq 1\}$. *Hint.* $u=x-y, v=x+y$.
2. $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad D=\{(x,y)|(\tfrac{x}{a})^2+(\tfrac{y}{b})^2\leqq 1\}$. *Hint.* $x=ar\cos\theta, y=br\sin\theta$.
3. $\displaystyle\iint_D (x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D=\{(x,y)|0\leqq x+y\leqq 1, 0\leqq y\leqq 1\}$. *Hint.* $u=x+y, v=y$.

---

http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, tel:0775437501 数理情報学科へや:1 号館 5 階 508.

13.4　ガウス積分

ガウス積分の公式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ を利用して, 次の定積分を求めよう. *Hint.* $-ax^2+bx+c$ を平方完成して置換積分.

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$. ($a>0, b, c$ は定数)
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$. ($a>0, b, c$ は定数)

13.5　3 重積分と球座標

1. 直交座標 (x,y,z) で書かれた定積分 $\displaystyle\iiint_D z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad D=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \leqq a^2\}$ ($a>0$ は定数) を, 変数変換で球座標 (r,θ,ϕ) に移ることによって求めよう.
2. 直交座標 (x,y,z) で書かれた定積分 $\displaystyle\iiint_D xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad D=\{(x,y,z)|x^2+y^2 \leqq 1, 0 \leqq x, 0 \leqq z \leqq 1\}$ を, (x,y) のみ平面極座標 (r,θ) に移ることによって求めよう (これを円柱座標という).

ファイナルトライアルやります!

01 月 26 日 (水)1 講時. 50 点分です. こんども外部記憶ペーパー (再度作成します) 使えます.

主な出題範囲は冬のプチテストの後の部分 (積分) ですが, 問題を解くには, 当然, その前の部分の知識も必要になります. 具体的には次の問題を出します. [　] の中の数字は予定される比重 (%) ですが, 多少の変動はあります.

1. 1,2 変数のテイラー展開 (冬のプチテストの 1), 極限の計算への応用. [30]
2. 置換積分や部分積分を利用した 1 変数の積分.[20]
3. 広義積分 [10]
4. 長方形領域, 一般の領域の 2 重積分. [25]
5. 変数変換 (→ ヤコビアン), 特に極座標を利用した 2 重積分の計算. [15]