微積分♪演習 秋のプチテスト

樋口さぶろお[1] 配布: 2004 年 10 月 27 日更新: Time-stamp: "2004/10/27 Wed 13:15 hig"

注意 片面です．全部で 4 問です．50 分間．

1. 座席指定にご協力してね.
2. 参照なしです.
3. 解答用紙の 1 面に 1 問ずつ, 指定された用紙に解答しよう.
4. 過程も答えよう．最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
5. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.
6. 答案の扱いについて, 次の 2 つのうち希望する方を, 答案用紙の欄にマークしよう.
7. 出席チェックするので学生証を机の上に出してね.
8. 携帯電話は (時計としても) 使わないでね.

1

1. $f(x) = \operatorname{sgn} x$ を, まず x 方向に $+2$ 平行移動, 次に x 方向に -3 倍に拡大した関数 $g(x)$ の式を求め, グラフを描こう.
2. $f(x) = \operatorname{sgn} x$ を, まず x 方向に -3 倍に拡大, 次に x 方向に $+2$ 平行移動した関数 $h(x)$ の式を求め, グラフを描こう.

2

$f(x) = -3\cos(\frac{1}{4}x)$ ただし定義域を $0 \leqq x \leqq 4\pi$ とする.

1. $f(x)$ の値域を求めよう.
2. 逆関数 $f^{-1}(x)$ の式を Cos^{-1} を使って書こう．$f^{-1}(x)$ の定義域, 値域を求めよう.
3. $\dfrac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}(x)$ を求めよう．ただし, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{Cos}^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ を公式としてつかってよいです.

3

複素数 $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, $z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}i}$ に対して次の数を求めよう.

1. $|z_1|, \operatorname{Arg} z_1$.
2. $\operatorname{Re} z_2, \operatorname{Im} z_2$.
3. $|z_1 z_2|, \operatorname{Arg}(z_1 z_2)$.
4. $\operatorname{Im}(z_1^{100})$.

4

次の導関数を求めよう．ただし, $x \in \mathbb{R}$.

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|3-2x|.\quad (x \neq \frac{3}{2})$
2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}.\quad (x \neq \pm\frac{1}{2})$
3. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{Cosh}^{-1}x\quad (x \geqq +1)$(公式でなく, 逆関数の微分法を使ってね)
4. $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\mathrm{e}^{-x^2})$.
5. $\dfrac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x^4}(x^3\mathrm{e}^{2x})$.

点数のお知らせ

各自の点数は, 生協メール (アドレス `t040`*nnnx*`@ryukoku-u.jp`) で個別にお知らせします．ここに届いたメールは, Web ページ `http://www.seikyou.ne.jp/ryukoku/` で見られます.

`http://hig3.net/`(講義のページもここからたどれます), `http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/`, `mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp`, `tel:0775437501` 数理情報学科へや:1 号館 5 階 508.

微積分♪演習[2]秋のプチテスト略解

龍谷大学理工学部数理情報学科 2004 年 10 月 27 日樋口さぶろお[3]

1

1. $g(x) = \mathrm{sgn}(\frac{x}{-3} - 2)$. ($-6$ 未満が 1)
2. $h(x) = \mathrm{sgn}(\frac{x-2}{-3})$. ($+2$ 未満が 1)

2

1. 値域は $-3 \leqq y \leqq +3$
2. $y = -3\cos(\frac{1}{4}x)$ とおいて x について解くと, $x = 4\,\mathrm{Cos}^{-1}(-\frac{1}{3}y)$. よって, $f^{-1}(x) = 4\,\mathrm{Cos}^{-1}(-\frac{1}{3}y)$. 定義域は $-3 \leqq x \leqq +3$, 値域は $0 \leqq y \leqq 4\pi$.
3. 合成関数の微分法を用いて,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 4\,\mathrm{Cos}^{-1}(-\tfrac{1}{3}x) = 4 \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-(-\frac{1}{3}x)^2}} \cdot (-\tfrac{1}{3}) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{9}x^2}}. \tag{2.1}$$

3

1. 図より $z_1 = \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}\pi i}$. よって, $|z_1| = 1, \mathrm{Arg}\, z_1 = \frac{11}{6}\pi$.
2. オイラーの公式より $z_2 = \sqrt{2}(\cos -\frac{1}{4}\pi - i \sin -\frac{1}{4}\pi) = 1 - i$. よって, $\mathrm{Re}\, z_2 = 1, \mathrm{Im}\, z_2 = -1$.
3. $z_1 z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{(-\frac{1}{4}-\frac{1}{6})\pi i}$. よって, $|z_1 z_2| = \sqrt{2}, \mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \frac{19}{12}\pi$.
4. $z_1^{100} = \mathrm{e}^{-\frac{100}{6}\pi i}$. $\mathrm{e}^{2\pi i} = 1$ に注意すると, $\mathrm{Im}\, z_1^{100} = \mathrm{Im}\, \mathrm{e}^{-\frac{4}{6}\pi i} = \sin -\frac{4}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4

1. 合成微分法より $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln|3-2x| = \dfrac{-2}{3-2x}$.
2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-4x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(1-4x^2)^{-\frac{3}{2}}(-8x) = 4x(1-4x^2)^{-\frac{3}{2}}$.
3. $y = \cosh x$ として逆関数の微分法を使う. ここで, $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ と Cosh^{-1} の定義域より, $\sinh x = +\sqrt{\cosh^2 x - 1} = \sqrt{y^2-1}$ なので,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \mathrm{Cosh}^{-1}\, y = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh x} = \frac{1}{\sinh x} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}. \tag{4.1}$$

   結局, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mathrm{Cosh}^{-1}\, x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
4. $(\mathrm{e}^{-x^2})' = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$. $(\mathrm{e}^{-x^2})'' = (-2 + (-2x)^2)\mathrm{e}^{-x^2}$.
5. ライプニッツの公式から,

$$\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x^4}(x^3\mathrm{e}^{2x}) = 1\cdot 0 + 4\cdot 6\cdot 2 + 6\cdot 6x\cdot 4 + 4\cdot 3x^2\cdot 8 + 1\cdot x^3\cdot 16)\mathrm{e}^{2x} = (48 + 144x + 96x^2 + 16x^3)\mathrm{e}^{2x}. \tag{4.2}$$

---

[2] http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/physmath1/

[3] mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/,
へや 1-508, でんわ 077-543-7501