微積分♪演習 冬のプチテスト

樋口さぶろお[1] 配布: 2004 年 12 月 01 日更新: Time-stamp: "2004/12/02 Thu 20:44 hig"

注意

1. **4問です．裏もあります**
2. 出席チェックのときに学生証を見せてね.
3. 過程も答えよう．最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
4. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.
5. すべての問で $x, y, a, b, t \in \mathbb{R}$ です.
6. 必要なら, 関数 e^x, 関数 $\frac{1}{1-x}$ の $x = 0$ におけるテイラー級数は, 導かないで使ってもいいです.
7. 外部記憶ペーパー作成 10 分 + 答案作成 80 分.

1

1. 関数 $f(x) = \cos(2-3x)$ の導関数 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$ を求めよう.
2. 関数 $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/4}}$ の導関数 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$ を求めよう.
3. 関数 $f(x) = x^4\mathrm{e}^{-x}$ に対して, $\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(1)$ を求めよう.
4. 関数 $f(x, y) = x^2y^2 - \frac{y}{2+x}$ について, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ を求めよう.
5. 関数 $f(x, y) = x^2y^2 - \frac{y}{2+x}, \xi(t) = \mathrm{e}^{2t}, \eta(t) = \mathrm{e}^{-3t}$ とする．合成関数 $z(t) = f(\xi(t), \eta(t))$ について, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0)$ を求めよう.

2

1. 関数 $f(x) = \ln x$ の $x = 1$ における 3 次のテイラー展開を求めよう．剰余項はランダウの記号を用いて書こう.
2. 関数 $f(x) = \frac{1-x}{2+x}$ の $x = 0$ における 2 次のテイラー展開を求めよう．剰余項はランダウの記号を用いて書こう.

http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, tel:0775437501 数理情報学科へや:1 号館 5 階 508.

3

関数 $f(x)=\mathrm{e}^{-3x+3}$ を考える.

1. $y=f(x)$ の $x=1$ における接線の方程式を求めよう.
2. $y=f(x)$ の $x=1$ における'接放物線' の方程式を求めよう.
3. $f(x)$ の $x=1$ におけるテイラー級数を求めよう.
4. $f(x)$ の $x=1$ における 2 次のテイラー展開を利用して, $f(1.1)$ の近似値を求めよう. 誤差や剰余項は, 求めたり評価したりしなくてよい.

4

1. $f(x,y)=x^3-3x+y+1$ を考えよう
   (a) $z=f(x,y)$ の等高線プロットを描こう.
   (b) $z=f(x,y)$ の $(x,y)=(2,9)$ における接平面の方程式を求めよう.
2. $g(x,y)=-x^3+\frac{1}{8}y^3+\frac{3}{2}xy-1$ を考えよう.
   (a) 曲面の $z=g(x,y)$ について, 接平面が xy 平面と平行になるような点 $(x,y)=(a,b)$ を (複数あればすべて) 求めよう.
   (b) $g(x,y)$ の, 上で求めた点 $(x,y)=(a,b)$ (複数あれば好きな点を選んでよい) における 2 次のテイラー展開を求めよう. 剰余項は R_3 と書くだけでよい.

点数のお知らせ

各自の点数は, 生協メール (アドレス `t040`*nnnx*`@ryukoku-u.jp`) で個別にお知らせします. ここに届いたメールは, Web ページ `http://www.seikyou.ne.jp/ryukoku/` で見られます.

微積分♪演習冬のプチテスト (略解) (情報メディア学科 1 年次科目)

樋口さぶろお[2] 配布: 2004 年 12 月 01 日更新: Time-stamp: ”2004/12/02 Thu 20:44 hig”

1

1. 合成微分の法則を用いて, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = 3\sin(2-3x)$.
2. 合成微分の法則を用いて, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x^2)^{-\frac{3}{4}} = -\frac{3}{2}x(1+x^2)^{-\frac{7}{4}}$.
3. ライプニッツの公式より,

$$\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(x) = 1\times 4\cdot 3\cdot 2x\times \mathrm{e}^{-x} + 3\times 4\cdot 3x^2\times(-1)\mathrm{e}^{-x} + 3\times 4x^3\times(-1)^2\mathrm{e}^{-x} + 1\times x^4\times(-1)^3\mathrm{e}^{-x}. \quad (1.1)$$

よって, $\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(1) = -\mathrm{e}^{-1}$.

4. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^2 + \frac{y}{(2+x)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2y - \frac{1}{(2+x)}$.
5. 2 変数関数の合成微分の法則より, ((t) を省略して書くと)

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} = \left(2\xi\eta^2 + \frac{\eta}{(2+\xi)^2}\right)\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} + \left(2\xi^2\eta - \frac{1}{2+\xi}\right)\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}. \quad (1.2)$$

ここで, $\xi(0) = \eta(0) = 1$, $\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}(0) = 2$, $\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}(0) = -3$ に注意すると, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0) = \frac{19}{9}\cdot 2 + \frac{5}{3}\cdot(-3) = -\frac{7}{9}$.
なお, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t) = -2\mathrm{e}^{-2t} + 2\mathrm{e}^{-t}(2+\mathrm{e}^{2t})^{-2} + 3\mathrm{e}^{-3t}(1+\mathrm{e}^{2t})^{-1}$.

2

1. $\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(x) = (k-1)!(-1)^{k-1}x^{-k}$. $(k\geq 1)$ より,

$$f(x) = 0 + (x-1) - \tfrac{1}{2}(x-1)^2 + \tfrac{1}{3}(x-1)^3 + O((x-1)^4). \quad (2.1)$$

2. 等比級数の公式を利用して,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-1(2+x)+3}{2+x} = -1 + \frac{3}{2+x} = -1 + \frac{3}{2}\times\frac{1}{1+\frac{1}{2}x} \\ &= -1 + \tfrac{3}{2}(1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{8}x^3) + O(x^4) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{4}x + \tfrac{3}{8}x^2 + O(x^3). \end{aligned} \quad (2.2)$$

あるいは

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(1-x)\frac{1}{1+\frac{1}{2}x} = \tfrac{1}{2}(1-x)(1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}x^2 + O(x^3)) \quad (2.3)$$

を利用してもよい.

---

[2]
http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, tel:0775437501 数理情報学科へや:1 号館 5 階 508.

3

$f(1) = 1, f'(1) = -3, f''(1) = +9$ より,

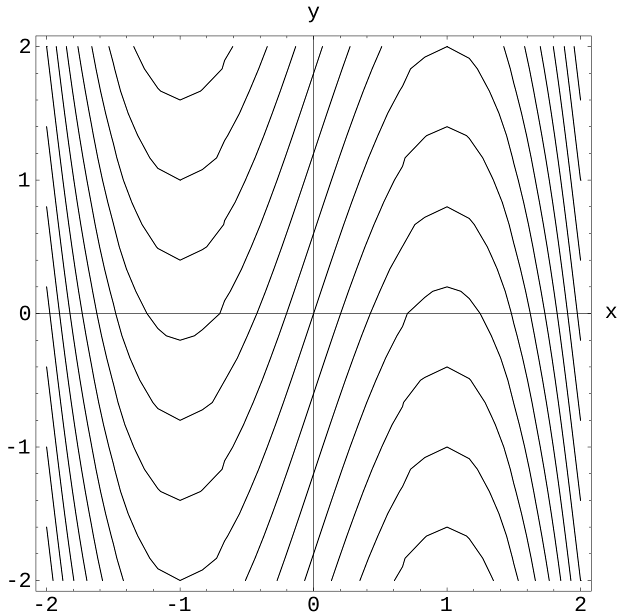
1. $y - 1 = -3(x - 1)$.
2. $y - 1 = \frac{9}{2}(x-1)^2 - 3(x-1)$.
3.

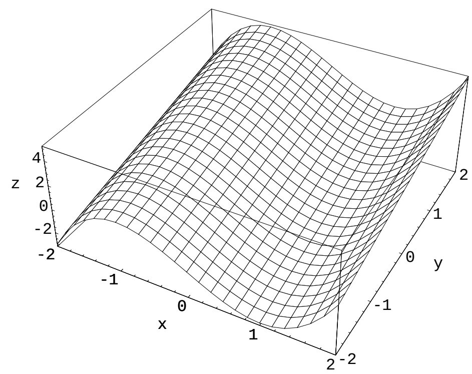
$$f(x) = \mathrm{e}^{-3(x-3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-3(x-1))^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k}{k!}(x-1)^k. \tag{3.1}$$

4. $f(1.1) \simeq 1 + (-3) \cdot 0.1 + \frac{(-3)^2}{2}(0.1)^2 = 1 - 0.3 + 0.045 = 0.745$.

4

1. (a) 等高線は $y = -x^3 + 3x - 1$ を y 方向に平行移動したもの. $y = -x^3 + 3x$ は, $x = \pm 1$ で極大, 極小. $x = 0, \pm\sqrt{3}$ で x 軸と交わる.





   (b) $f(2,9) = 12, f_x(2,9) = 9, f_y(2,9) = 1$ より, $z - 12 = 9(x-2) + (y-9)$.

2. (a) $g_x(a,b) = -3a^2 + \frac{3}{2}b = 0, g_y(a,b) = \frac{3}{8}b^2 + \frac{3}{2}a = 0$ を連立させて解くと, $(a,b) = (0,0), (-1,2)$.

   (b) $(x,y) = (0,0)$ におけるテイラー展開は

$$g(x,y) = -1 + \frac{3}{2}(x-0)(y-0) + R_3, \tag{4.1}$$

   $(x,y) = (-1,2)$ におけるテイラー展開は

$$g(x,y) = -2 + \frac{1}{2!}(6(x+1)^2 + 3(x+1)(y-2) + \frac{3}{2}(y-2)^2) + R_3' \tag{4.2}$$

   いずれも 1 次の項は自動的に 0 になる.