微積分♪演習 (略解) (情報メディア学科 1 年次科目)

樋口さぶろお[1] 配布: 2004/11/10 Wed 更新: Time-stamp: "2004/12/01 Wed 08:03 hig"

7 テイラー展開の応用

7.1 お奨め問題セレクション

略解

1. $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + R_{n+1}(x)$, $R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{1}{(1+\theta \cdot x)^{n+1}} x^{n+1}$, $0 < \theta < 1$

2. $\ln(1.1) = f(0.1) = 0.1 - 0.005 + R_3(x) = 0.095 + R_3(x)$. 誤差 $|R_3(x)| < \frac{1}{3}(0.1)^3 = 0.000333\ldots$.

3. $f(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}\sin x}$ より, $f(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} (\frac{1}{2}\sin x)^k + O(x^{n+1}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{48}x^3 + O(x^4)$.

7.2 三角関数のテイラー展開と近似計算

略解

1. $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1/2}{1!}(x-\frac{\pi}{3}) + \frac{-\sqrt{3}/2}{2!}(x-\frac{\pi}{3})^2 + R_3(x)$, $R_3(x) = \frac{-1}{3!}\cos(\frac{\pi}{3} + (x-\frac{\pi}{3})\theta)(x-\frac{\pi}{3})^3$.

2. $f(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{90}) = 0.866025403\ldots - 0.0174532925\ldots - 0.000527612847\ldots = 0.84804498\ldots$, 誤差 $|R_3(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{90})| < \frac{1}{3!}\cos(\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{90})^3 = 0.00000501252$. ここで $|\cos(58^\circ)| < |\cos\frac{\pi}{4}|$ を使った. $|\cos 0| = 1$ を用いてもよい (誤差は大きめに出てしまうが.).

7.3 もっと楽してテイラー展開

略解

1. $e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k}$.

2. $(2x+3)^{-2/3} = 3^{-2/3}(1 - \frac{4}{9}x + \frac{20}{81}x^2 + O(x^3))$.

3. $e^x \sin x = (\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots)(\frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + O(x^5)$.

4. $\frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$.

---

http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, tel:0775437501 数理情報学科へや:1 号館 5 階 508.

5. $\frac{1}{1-(x+x^2)} = 1 + (x + x^2) + (x + x^2)^2 + \cdots = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + O(x^4)$.

6. $\frac{1+2x}{1-x} = 1 + 3x + 3x^2 + 3x^3 + O(x^4)$.