微積分♪演習 (略解) (情報メディア学科 1 年次科目)

樋口さぶろお[1] 配布: 2004/12/08 Wed 更新: Time-stamp: "2004/12/17 Fri 09:17 hig"

11 極限と広義積分

11.1 お奨め問題

略解

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-\frac{1}{2}x^2+O(x^4))}{x^2}=\frac{1}{2}$.
2. 置換積分 $t:=x^2$ により, $\int_{-\infty}^{0} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{\infty}^{0}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}$.
3. 置換積分 $t:=2-x$ により, $\int_0^2\frac{1}{\sqrt{2-x}}\mathrm{d}x=-\int_2^0 t^{-1/2}\mathrm{d}t=2\sqrt{2}$.

11.2 テイラー展開を用いた極限計算とロピタルの定理

略解

1. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^{-x^2}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+O(x^4)}{x+O(x^3)}==\lim_{x\to 0}\frac{x+O(x^3)}{1+O(x^2)}=0$.
2. $-\infty$
3. 1.

11.3 広義積分

略解

1. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=[\mathrm{Tan}^{-1}\,x]_{-\infty}^{+\infty}=\pi$.
2. $\int_0^1 x(-3(1-x)^{1/3})'\mathrm{d}x=\frac{9}{4}$.
3.
$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{2n}^{2n+1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\mathrm{e}^{-1})(\mathrm{e}^{-2})^n=(\text{等比級数の公式})=\frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{1-\mathrm{e}^{-2}}=\frac{\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}\quad(11.1)$$
4. $\int_{-\infty}^{a}\frac{-1}{\cosh x}\mathrm{d}x+\int_a^{+\infty}\frac{1}{\cosh x}\mathrm{d}x=-2\int_0^{\mathrm{e}^a}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t+2\int_{\mathrm{e}^a}^{\infty}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\cdots=\pi-4\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\mathrm{e}^a$ または $\mathrm{Tan}^{-1}\,\mathrm{e}^{-a}-\mathrm{Tan}^{-1}\,\mathrm{e}^a$.

---

http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, tel:0775437501 数理情報学科へや:1 号館 5 階 508.

5. $\lim_{\epsilon\to 0}(\epsilon\log\epsilon)=0$ より, -1.

6. $I(R)=\int_{-R}^{0} x\mathrm{e}^{(1-i)x}\,\mathrm{d}x$ とおくと, 部分積分により,

$$
\begin{aligned}
I(R) =&[x\tfrac{1}{1-i}\mathrm{e}^{(1-i)x}]_{-R}^{0}-\int_{-R}^{0}\tfrac{1}{1-i}\mathrm{e}^{(1-i)x}\,\mathrm{d}x\\
=&[x\tfrac{1}{1-i}\mathrm{e}^{(1-i)x}]_{-R}^{0}-[(\tfrac{1}{1-i})^2\mathrm{e}^{(1-i)x}]_{-R}^{0}\\
=&(0+\tfrac{1}{1-i}R\,\mathrm{e}^{-(1-i)R})-(\tfrac{1}{1-i})^2(1-\mathrm{e}^{-(1-i)R}).
\end{aligned}
\tag{11.2}
$$

ここで, $R\to+\infty$ のとき $|\mathrm{e}^{-(1-i)R}|=|\mathrm{e}^{-R}|\to 0$, $|R\,\mathrm{e}^{-(1-i)R}|=|R\,\mathrm{e}^{-R}|\to 0$ なので,

$$
\lim_{R\to+\infty} I(R)=-(\tfrac{1}{1-i})^2=-\tfrac{(1+i)^2}{(1-i)^2(1+i)^2}=-\tfrac{1}{2}i. \tag{11.3}
$$