微積分♪演習ファイナルトライアル

樋口さぶろお[1]　配布: 2006 年 02 月 01 日更新: Time-stamp: ”2006/02/08 Wed 13:18 hig”

ファイナルトライアル参加案内

両面です．全部で 5 問です．
外部記憶ペーパー作成 10 分＋答案作成 80 分です．

1. 解答用紙の 1 面に 1 問ずつ, 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.
4. すべての問で $x, y \in \mathbb{R}$ です.
5. 必要なら, 関数 e^x の $x = 0$ におけるテイラー級数は, 導かないで使ってもいいです.
6. 出席チェックするので学生証を机の上に出してね. 携帯電話は (時計としても) 使わないでね.

1

次の定積分 (広義積分も含む) を求めよう.

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi^{1/3}} x^2 \sin(x^3)\,\mathrm{d}x.$ ($t = x^3$ とおいて置換積分を用いてもよい)
3. $\displaystyle\int_0^{2} x \cdot \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x.$ (部分積分を用いてもよい)
4. $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x.$ ($x = 2\tan t$ とおいて置換積分を用いてもよい)
5. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x \cos 2x\,\mathrm{d}x.$ (オイラーの公式で e^{ax} の積分になおしてもよい)

2

1. 直交座標 (x, y) で書かれた 2 重積分

$$I_1 = \iint_{D_1} (x^2 y + x)\,\mathrm{d}S \qquad D_1 = \{(x, y) | 0 \leqq x \leqq 3, -2 \leqq y \leqq 0\}$$

　の値を求めよう.

2. 直交座標 (x, y) で書かれた 2 重積分

$$I_2 = \iint_{D_2} (x^3 - xy^2)\,\mathrm{d}S \qquad (D_2 \text{ は } (0, -1), (0, 0), (-2, -1) \text{ を 3 頂点とする 3 角形の内部})$$

　の値を求めよう.

http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

3

1. 直交座標 (x, y) で書かれた次の 2 重積分を考える.

$$I_3 = \iint_{D_3} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad D_3 = \{(x, y) | 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4, y \leqq 0\}.$$

   (a) 積分範囲を図示しよう.
   (b) 積分 I_3 を極座標 (r, θ) を用いて書き直そう. ヤコビアンは公式を用いてもよい.
   (c) 変数 r, θ についての 2 重積分を計算し, I_3 の値を求めよう.

2. 直交座標 (x, y) で書かれた 2 重積分を考える.

$$I_4 = \iint_{D_4} \sin(x + 2y) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad D_4 = \{(x, y) | 1 \leqq x + 2y \leqq \pi, 0 \leqq x - 2y \leqq 3\}.$$

   (a) 変数変換 $u = x + 2y, v = x - 2y$ をするときヤコビアンの絶対値 $|J| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ を求めよう.
   (b) I_4 を求めよう. u, v に変数変換して求めてもよい.

4

1. 関数 $f(x) = \sin 3x$ の, $x = 0$ における 3 次のテイラー展開を求めよう. 剰余項はランダウ記号で書こう.
2. 関数 $g(x) = \mathrm{e}^{-2x} - 1$ の, $x = 0$ における 3 次のテイラー展開を求めよう. 剰余項はランダウ記号で書こう.
3. 極限 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ は, $\frac{0}{0}$ の不定形である. 上で求めたテイラー展開を利用して, 極限の値を求めよう.

5

関数 $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 2xy - 6x + 6y$ を考える.

1. 偏微分 $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ を求めよう.
2. 停留点 (偏微分が $f_x(x, y) = 0$ かつ $f_y(x, y) = 0$ となるような点) (x, y) を求めよう.
3. 関数 f の上で求めた停留点における 2 次のテイラー展開を求めよう (結果は多項式を展開しないで, $(x - a)^2$ のような形のままでよい. 剰余項は R_3 とだけ書けばよい).
4. 関数 f の上で求めた停留点が極大であるか, 極小であるか, 極大でも極小でもないかは判定できないと思うので, それはしなくていいです.

微積分♪演習 ファイナルトライアル略解

龍谷大学理工学部数理情報学科 2006 年 02 月 01 日樋口さぶろお[2]

1

1. $I(R)=\int_0^R \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$ とおくと,

$$I(R)=[-\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}]_0^R=\tfrac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2R}).$$

求める (広義) 定積分は $\lim_{R\to+\infty} I(R)=\frac{1}{2}$.

2. 変数変換 $t=x^3$ により, $\mathrm{d}t=3x^2\,\mathrm{d}x$. 求める定積分は,

$$\int_0^\pi \sin t\cdot\tfrac{1}{3}\,\mathrm{d}t=\tfrac{2}{3}.$$

3. 部分積分により,

$$[x\tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}]_0^2-\int_0^2\tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x=\tfrac{5}{9}\mathrm{e}^6+\tfrac{1}{9}.$$

4. 変数変換 $x=2\tan t$ により, $\mathrm{d}x=\frac{2}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$. また $1+\tan^2 t=\frac{1}{\cos^2 t}$ に注意すると, 求める定積分は,

$$\int_0^{\frac{1}{3}\pi}\frac{1}{4+4\tan^2 t}\cdot\frac{2}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{3}\pi}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{6}.$$

5. オイラーの公式 (の逆) $\cos x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix})$ に注意して, 求める定積分は,

$$\frac{1}{4}\int_0^\pi(\mathrm{e}^{3ix}+\mathrm{e}^{-3ix}+\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix})\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4i}\left[\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^{3ix}-\mathrm{e}^{-3ix}\right)+\left(\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix}\right)\right]_0^\pi$$
$$=\tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{3}(-1-1)+(1+1)=\tfrac{1}{3}.$$

2

1.

$$I_1=\int_0^3\left\{\int_{-2}^0(x^2y+x)\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x=\int_0^3(-2x^2+2x)\,\mathrm{d}x=-9.$$

2.

$$I_2=\int_{-1}^0\left\{\int_{2y}^0(x^3-xy^2)\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}y=\int_{-1}^0-2y^2\,\mathrm{d}y=-\tfrac{2}{5}.$$

別解

$$I_2=\int_{-2}^0\left\{\int_{-1}^{\frac{1}{2}x}(x^3-xy^2)\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x=\int_{-2}^0(\tfrac{11}{24}x^4+x^3-\tfrac{1}{3}x)\,\mathrm{d}x=-\tfrac{2}{5}.$$

[2]
`http://hig3.net/`(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

3

1. $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$, $y = r\sin\theta$ より,
$$I_3 = \int_{-\pi}^{0} \mathrm{d}\theta \int_{1}^{2} \mathrm{d}r\; r^2 \sin\theta = \left[\tfrac{1}{3}r^3\right]_1^2 \times [-\cos\theta]_{-\pi}^{0} = -\tfrac{14}{3}.$$
2. 変数変換の式を x, y について解くと $x = \frac{1}{2}(u+v), y = \frac{1}{4}(u-v)$. よって,
$$J = \det\begin{pmatrix} +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}.$$
よって, $|J| = \frac{1}{4}$ で,
$$I_4 = \int_{1}^{\pi} \mathrm{d}u \int_{0}^{3} \mathrm{d}v\; \sin u \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}(1+\cos 1).$$

4

1. e^x のテイラー展開を利用して, $f(x) = \frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{3ix} - \mathrm{e}^{-3ix}) = 3x - \frac{1}{3!}(3x)^3 + \mathcal{O}(x^5)$.
2. $g(x) = (-2x) + \frac{1}{2!}(-2x)^2 + \frac{1}{3!}(-2x)^3 + \mathcal{O}(x^4)$.
3. $$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x - \frac{1}{3!}(3x)^3 + \mathcal{O}(x^5)}{(-2x) + \frac{1}{2!}(-2x)^2 + \frac{1}{3!}(-2x)^3 + \mathcal{O}(x^4)} = \frac{3 - \frac{9}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4)}{-2 - 2x + \mathcal{O}(x^2)}.$$
よって, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{3}{2}$.

5

1. $f_x(x,y) = 8x + 2y - 6$, $f_y(x,y) = 2x + 2y + 6$, $f_{xx}(x,y) = 8$, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2$, $f_{yy}(x,y) = 2$.
2. $f_x(x,y) = 8x + 2y - 6 = 0$, $f_y(x,y) = 2x + 2y + 6 = 0$ を連立方程式として解いて $(x,y) = (2,-5)$.
3. $f(x,y) = -21 + \frac{1}{2!}(8(x-2)^2 + 4(x-2)(y+5) + 2(y+5)^2) + R_3$. この場合は実は剰余項 $R_3 = 0$ です.
4. $f(x,y) = -21 + 4((x-2) + \frac{1}{4}(y+5))^2 + \frac{3}{4}(y-5)^2 + R_3$ と書き直せることから, 実は極小です. 2 回生の線形代数で, 2 次形式の標準化を学ぶと自然にわかります.

お知らせ

- 各自の点数は生協メール `t050nnnx@ryukoku-u.jp` で, うまくいけば 2 月 10 日頃に個別にお知らせします.
- 外部記憶ペーパー (のみ) を, 3 月の成績配布以降 4 月 30 日まで, 1-502 前レターボックスで返却します.