微積分♪演習 (略解) (情報メディア学科 1 年次科目)

樋口さぶろお[1] 配布: 2005/10/19 Wed 更新: Time-stamp: "2005/10/20 Thu 12:14 hig"

4 高階微分/複素平面とオイラーの公式

$i \in \mathbb{C}$ は虚数単位, $z \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$ です.

4.1 お奨め問題 1

略解

1. $z_1 = \mathrm{e}^1 \times \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}i} = \mathrm{e} \cdot (\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})) = \frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}i$. よって, $\operatorname{Re} z_1 = \frac{\mathrm{e}}{2}, \operatorname{Im} z_1 = -\frac{\sqrt{3}\mathrm{e}}{2}$.
2. $|z_2| = \sqrt{(+1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \operatorname{Arg} z_2 = \frac{7}{4}\pi$.
3. $z_3 = 0 - i = 1 \cdot \mathrm{e}^{\frac{3}{2}\pi i}$.

4.2 オイラーの公式

略解

1. 0.
2. $(1 + (1 - i)x)\mathrm{e}^{(1-i)x}$.
3. $\sqrt{2}\mathrm{e}^x$.
4. $z^{-100} = \mathrm{e}^{-100}\mathrm{e}^{2\pi i \cdot 16 + \frac{4}{3}\pi i} = \mathrm{e}^{-100}\mathrm{e}^{\frac{4}{3}\pi i}$. $\operatorname{Re} z^{-100} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-100}$, $\operatorname{Im} z^{-100} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-100}$.

4.3 お奨め問題 2

略解

1. $f^{(3)}(x) = \mathrm{e}^{-x}(-x^2 + 6x - 7)$.
2. $f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{ix} + (-1)^n \mathrm{e}^{-ix})$ より, $f^{(n)}(0) = \frac{1}{2}(i^n + (-i)^n)$.
3. $f^{(4)}(x) = (-36x + x^3)\cos x + (-24 + 12x^2)\sin x$.

`http://hig3.net/`(講義のページもここからたどれます), `http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/`
`tel:0775437514` 数理情報学科へや:1 号館 5 階 502.

4.4　高階微分

略解

1. $\binom{104}{1}(\mathrm{e}^x)^{(1)}(x^{103})^{(103)}$ の項からしか寄与がなく, 104!.
2. $f^{(0)}(1) = 1$, $f^{(1)}(1) = \frac{1}{3}$, $f^{(2)}(1) = -\frac{2}{9}$, $f^{(3)}(1) = \frac{10}{27}$.
3. $f^{(0)}(0) = 1$, $f^{(1)}(0) = \frac{1}{2}$, $f^{(2)}(0) = -\frac{1}{4}$, $f^{(3)}(0) = \frac{3}{8}$.