微積分♪演習 (略解) (情報メディア学科 1 年次科目)

樋口さぶろお[1] 配布: 2005/12/14 Wed 更新: Time-stamp: "2005/12/15 Thu 12:34 hig"

11 極限と広義積分

11.1 お奨め問題

略解

1. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-(1-\frac{1}{2}x^2+O(x^4))}{x^2}=\frac{1}{2}$.
2. 置換積分 $t:=x^2$ により, $\int_{-\infty}^{0} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{\infty}^{0}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}$.
3. 置換積分 $t:=2-x$ により, $\int_0^2\frac{1}{\sqrt{2-x}}\mathrm{d}x=-\int_2^0 t^{-1/2}\mathrm{d}t=2\sqrt{2}$.

11.2 広義積分

略解

1. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=[\mathrm{Tan}^{-1}x]_{-\infty}^{+\infty}=\pi$.
2. $\int_0^1 x(-3(1-x)^{1/3})'\mathrm{d}x=\frac{9}{4}$.
3. $$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{2n}^{2n+1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\mathrm{e}^{-1})(\mathrm{e}^{-2})^n=(\text{等比級数の公式})=\frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{1-\mathrm{e}^{-2}}=\frac{\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}} \tag{11.1}$$
4. $\int_{-\infty}^{a}\frac{-1}{\cosh x}\mathrm{d}x+\int_a^{+\infty}\frac{1}{\cosh x}\mathrm{d}x=-2\int_0^{\mathrm{e}^a}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t+2\int_{\mathrm{e}^a}^{\infty}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\cdots=\pi-4\,\mathrm{Tan}^{-1}\mathrm{e}^a$ または $\mathrm{Tan}^{-1}\mathrm{e}^{-a}-\mathrm{Tan}^{-1}\mathrm{e}^a$.
5. $\lim_{\epsilon\to 0}(\epsilon\ln\epsilon)=0$ より, -1.
6. $I(R)=\int_{-R}^{0}x\mathrm{e}^{(1-i)x}\,\mathrm{d}x$ とおくと, 部分積分により,
$$\begin{aligned}I(R)=&[x\tfrac{1}{1-i}\mathrm{e}^{(1-i)x}]_{-R}^{0}-\int_{-R}^{0}\tfrac{1}{1-i}\mathrm{e}^{(1-i)x}\,\mathrm{d}x\\=&[x\tfrac{1}{1-i}\mathrm{e}^{(1-i)x}]_{-R}^{0}-[(\tfrac{1}{1-i})^2\mathrm{e}^{(1-i)x}]_{-R}^{0}\\=&(0+\tfrac{1}{1-i}R\,\mathrm{e}^{-(1-i)R})-(\tfrac{1}{1-i})^2(1-\mathrm{e}^{-(1-i)R}).\end{aligned}\tag{11.2}$$
ここで, $R\to+\infty$ のとき $|\mathrm{e}^{-(1-i)R}|=|\mathrm{e}^{-R}|\to 0$, $|R\,\mathrm{e}^{-(1-i)R}|=|R\,\mathrm{e}^{-R}|\to 0$ なので,
$$\lim_{R\to+\infty}I(R)=-(\tfrac{1}{1-i})^2=-\tfrac{(1+i)^2}{(1-i)^2(1+i)^2}=-\tfrac{1}{2}i. \tag{11.3}$$

---

http://hig3.net/(講義のページもここからたどれます), http://www.a.math.ryukoku.ac.jp/~hig/
tel:0775437514 数理情報学科へや:1 号館 5 階 502.

11.3　テイラー展開を用いた極限計算とロピタルの定理

略解

1. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\mathrm{e}^{-x^2}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+O(x^4)}{x+O(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+O(x^3)}{1+O(x^2)} = 0.$
2. $-\infty$
3. 1.

11.4　複素数に値をとる関数の極限

略解

1. 存在しない.
2. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ は存在しない.
3. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ は存在しない.
4. $f(x) = \mathrm{e}^x$.. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ は存在しない.

目次 前回 次回 今回の問題