# 計算科学☆演習 II プチテスト

樋口さぶろお [1]　配布: 2015-06-05 Fri 更新: Time-stamp: "2015-06-17 Wed 08:04 JST hig"

### プチテスト参加案内

1. 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

## 1

確率変数 $R$ の標本を抽出したところ次のようになった.

$$+2, +2, +2, +2, +2, +2, -2, -2, -2, -2.$$

1. $R^3$ の標本期待値を求めよう.
2. $R$ の不偏標本分散を求めよう.

## 2

連続型確率変数 $X$ の確率密度関数が次であたえられる.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & (1 \le x < 3) \\ \frac{1}{4} & (4 \le x < 6) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. $X$ の母平均値を求めよう.
2. 確率 $P(X < 5)$ を求めよう.

## 3

時刻 $t$, 座標 $x$ とも整数値をとるペンギンのランダムウォークを考える. ペンギンは時刻 $t = 0$ に座標 $x = 0$ を出発し, 各時刻 $t = 1, 2, \ldots$ に,

確率 $1/5$ で負の方向に 1 だけ, 確率 $4/5$ で正の方向に 1 だけ

移動する. 時刻 $t$ におけるペンギンのの座標を $X(t)$ とする.

1. $X(3) = -2$ の確率を求めよう.


hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502

2. $X(3) = +1$ の確率を求めよう.
3. $X(81)$ の母平均値を求めよう.
4. $X(81)$ の母標準偏差を求めよう.

## 4

**過程不要**

時刻 $t$, 座標 $x$ とも整数値をとるペンギンのランダムウォークを考える. ペンギンは時刻 $t = 0$ に座標 $x = 0$ を出発し, 各時刻 $t = 1, 2, \ldots$ に, ~~各時刻 $t$ に,~~

確率 $\frac{1}{7}$ で $x$ から $x + 2$ に移動,
確率 $\frac{6}{7}$ で $x$ にとどまる.

時刻 $t$ に座標 $x$ にペンギンがいる確率~~を~~ $P(x, t)$ の ($t$ に関する) 漸化式と初期条件を求めよう.

## 5

**過程不要**

ランダムウォークで, 時刻 $t$ の座標を $X(t)$ とする. 時間 $t$, 座標 $x$ は整数値.
$X(t) = x$ である確率を $P(x, t)$ とするとき,

$$\text{漸化式 } P(x, t+1) = \frac{1}{3}P(x+1, t) + \frac{2}{3}P(x+2, t)$$

$$\text{初期条件 } P(x, -2) = \begin{cases} 1 & (x = -3) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

が成り立つとする.
$X(t)$ のモーメント母関数を $M(\lambda, t)$ とする.

1. $M(\lambda, t)$ の初期条件と漸化式を求めよう.
2. $M(\lambda, t)$ の具体的な形を $\lambda$ と $t$ で表そう.

## 6

ランダムウォーカーの時刻 $t$ における座標 $X(t)$ のモーメント母関数が $M(\lambda, t) = (\frac{5}{7}\mathrm{e}^{\lambda} + \frac{2}{7}\mathrm{e}^{-3\lambda})^{t-4}$ であるとき, 母平均値 $\mathrm{E}[X(t)]$ を求めよう.

7 **過程不要**

漸化式 $p_{t+1} = 3p_t$ を数値計算するときに

ソースコード 1: 数列

```
int t;
double p;
/* p の初期化. 略 */
for(t /*略*/){
  p=3*p;
}
```

とすることの類推から．漸化式 $u(x, t+1) = u(x-1, t) + u(x, t) + u(x+1, t)$ $(x = 0, 1, \ldots, 9)$ を数値計算するために

ソースコード 2: 数列

```
int t,x;
double u[10];
/* uの初期化. 略 */
for(t /*略*/){
  for(x=1;x<9;x++){
    u[x]=u[x-1]+u[x]+u[x+1];
  }
}
```

と書いてみたが, これは一般には誤った結果を与える.

1. 誤った結果を与える理由を短い日本語で説明しよう
2. 正しいプログラムに書きかえよう．なお, include や main や境界条件や初期条件などを書き足す必要はない．`for` 節での $x$ の範囲が $x = 0, 9$ をふくまないのは, 境界条件を考慮してこうしているので, 修正したり説明したりする必要はない.

## 8

連続型確率変数 $X$ の確率密度関数が次であたえられる.

$$f(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} & (1 \leq r < 2) \\ \frac{1}{3} & (2 \leq r < 3) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

$[0, 1)$ 一様乱数 $Y$ から $R$ の乱数を生成するための, $0 \leq y < 1$ で定義された関数 $r = g(y)$ を求めよう (プログラムでなく数式で書けばよい).

9 **過程不要**

次の 2 つのプログラムは, 最初にシードを入力すると, 値 $1, 2, 3$ をそれぞれ確率 $1/3$ で選んで出力することを 90 回繰り返すプログラムを書こうとして眠さのあまり間違えた 2 つの例である. どちらもつまらない文法的な誤りはなく, コンパイル, 実行可能であり, 2 つの間の差は 9–18 行だけである.

1. 誤プログラム 1 はどのような動作をするか
2. 誤プログラム 2 はどのような動作をするか

確率…で (または, 必ず) …を出力する, などのように答えよう. `double getuniform()` はシードによるが $[0, 1)$ 一様擬似乱数 (列) を返すとして考えてよい.

ソースコード 3: 誤プログラム 1

```
1  #include <stdio.h>
2  #include <stdlib.h>
3  
4  double getuniform();
5  
6  int main(){
7    int i;
8    int seed;
9    double y;
10   int s;
11 
12   scanf("%d",&seed);
13   for(i=0;i<90;i++){
14     srand(seed);/*loopの中*/
15     y=getuniform();
16     if(y<1.0/3.0){
17       s=1;
18     } else if(y<2.0/3.0){
19       s=2;
20     } else {
21       s=3;
22     }
23     printf("%d\n",s);
24   }
25   return 0;
26 }
27 
28 double getuniform(){
29   return rand()/(1.0+RAND_MAX);
30 }
```

ソースコード 4: 誤プログラム 2

```
1  #include <stdio.h>
2  #include <stdlib.h>
3  
4  double getuniform();
5  
6  int main(){
7    int i;
8    int seed;
9  /*  double y; */
10   int s;
11 
12   scanf("%d",&seed);
13   srand(seed);/*loopの外*/
14   for(i=0;i<90;i++){
15 /*    y=getuniform();    */
16     if(getuniform()<1.0/3.0){
17       s=1;
18     } else if(getuniform()<2.0/3.0){
19       s=2;
20     } else {
21       s=3;
22     }
23     printf("%d\n",s);
24   }
25   return 0;
26 }
27 
28 double getuniform(){
29   return rand()/(1.0+RAND_MAX);
30 }
```

# 計算科学☆演習 II プチテスト略解

樋口さぶろお [2] 配布: 2015-06-05 Fri 更新: Time-stamp: "2015-06-17 Wed 08:04 JST hig"

これは, 一部の過程のみ記した略解です. プチテストで, 受講者はすべての過程を記す必要があります.

**配点** 1,2,4-9:各 10 点,3:20 点

## 1

1. $\overline{R^3} = \frac{8}{5}$.
2. $\overline{R} = \frac{2}{5}$.
   $s^2 = \frac{1}{10-1}((2-\frac{2}{5})^2 \times 6 + (-2-\frac{2}{5})^2 \times 4) = \frac{48}{15}$.

**配点** 1:3 点, 2:標本平均値 3 点, 標本分散 4 点, 計 10 点

**講評** $\overline{R^2} - (\overline{R})^2$ を使うこともできるが, $-(\overline{R^3})^2$ ってするのはへんでしょ. また, 標本分散に対するこの式を使ったときは最後に $\frac{n}{n-1}$ 倍する必要がある.

ここで $\mathrm{E}[X^n], \mathrm{V}[X]$ のような記号を使っている答案は減点してもいいところ.

## 2

1. $\mathrm{E}[X] = \frac{7}{2}$.
2. $P(X < 5) = \frac{3}{4}$.

**配点** 1,2:各 5 点, 計 10 点

## 3

1. 0
2. ${}_3\mathrm{C}_2(\frac{4}{5})^2(\frac{1}{5})^1 = \frac{48}{125}$.
3. 時間 1 あたりの移動量を $R$ とすると, $\mathrm{E}[R] = \frac{3}{5}$ なので, $\mathrm{E}[X(81)] = \mathrm{E}[X(0)] + 81\mathrm{E}[R] = \frac{243}{5}$.
4. $\mathrm{V}[R] = \frac{16}{25}$. よって, $\mathrm{V}[X(81)] = 81\mathrm{V}[R] = 81 \times \frac{16}{25}$ より, 母標準偏差 $\sqrt{\mathrm{V}[X(81)]} = \frac{36}{5}$.

**配点** 1-4:各 5 点, 計 20 点


hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

## 4

$$
\begin{aligned}
P(x,t+1) =& \frac{1}{7} \times P(x-2,t) + \frac{6}{7} \times P(x,t) \\
P(x,0) =& \begin{cases} 1 & (x=0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

**配点**　1:6 点, 2:4 点, 計 10 点

## 5

1. $$
\begin{aligned}
M(\lambda,t+1) =& (\tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-\lambda} + \tfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-2\lambda}) M(\lambda,t) \\
M(\lambda,-2) =& \mathrm{e}^{-3\lambda}
\end{aligned}
$$

2. $M(\lambda,t) = (\tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-\lambda} + \tfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-2\lambda})^{t+2}\mathrm{e}^{-3\lambda}$.

**配点**　1:4 点, 2,3:3 点, 計 10 点

**講評**　漸化式とは, $a_{t+1}$ を $a_t$ で表す式のこと. いま $a_t = M(\lambda,t)$.

## 6

$$
\mathrm{E}[X(t)] = \frac{\partial}{\partial\lambda} M(\lambda,t)|_{\lambda=0} = -\tfrac{1}{7}(t-4).
$$

**配点**　10 点

## 7

1. $u(x+1,t)$ の値を計算するときに, $u(x,t)$ を使うべきところ, 直前に更新後の値 $u(x,t+1)$ で上書きされた `u[x]` が使われてしまうから.

2.

ソースコード 5: 数列

```
int t,x;
double u[10];
double unext[10];
for(t /*略*/){
  for(x=1;x<9;x++){
    unext[x]=u[x-1]+u[x]+u[x+1];
  }
  for(x=1;x<9;x++){
    u[x]=unext[x];
  }
}
```

**配点**　1,2:各 5 点, 計 10 点

**講評**　u[x] が上書きで更新されるから, だけでは正解とはいえません. 正しいプログラムでも u[x] は上書きで更新されます.

## 8

$$g(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}y + 1 & (0 \leq y < \frac{2}{3}) \\ 3y & (\frac{2}{3} \leq y < 1) \end{cases}$$

**配点**　10 点

## 9

1. `for` ループの中で乱数が毎回 seed によってリセットされるので, 入力した seed に応じて最初に $1, 2, 3$ のうち 1 つが選ばれ, 毎回必ずその数が, 90 回繰り返して出力される.
2. `if-else if` の条件で呼ばれる `getuniform()` は毎回異なる結果を返すので, 1 が確率 $\frac{1}{3}$ で, 2 が確率 $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ で, 3 が確率 $1 - \frac{1}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$ で出力される.

**配点**　1,2:各 5 点, 計 10 点