ランダムウォークの座標の母分布

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆演習 II L03(2015-04-24 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2015-04-24 Fri 08:38 JST hig"

今日の目標

- ランダムウォークの $P(x,t)$ を 2 項係数を使って求められる
- ランダムウォークの性質から $X(t)$ の母平均値と母分散を求められる

http://hig3.net

L02-S1
Quiz 解答:ランダムウォークの確率と座標の期待値

1. $$P(X(3)=x)=\begin{cases}\frac{1}{27} & (x=+3)\\ \frac{6}{27} & (x=+1)\\ \frac{12}{27} & (x=-1)\\ \frac{8}{27} & (x=-3)\\ 0 & (\text{他})\end{cases}$$
2. $\mathrm{E}[X(3)]=3\cdot\frac{1}{27}+1\cdot\frac{6}{27}+\cdots=-1.$
3. $\mathrm{V}[X(3)]=\mathrm{E}[X(3)^2]-\mathrm{E}[X(3)]^2=(3^2\cdot\frac{1}{27}+1^2\cdot\frac{6}{27}+\cdots)-(-1)^2=\frac{8}{3}.$
4. $\mathrm{E}[\mathbf{1}_{[X(3)>1]}(X)]=\frac{1}{27}.$

L02-S2
Quiz 解答:ランダムウォーカーの到達点の座標の母平均・母分散

1. 標本平均値 $\overline{x(3)} = \frac{1}{10}(3+3+\cdots+(-3)) = 1$. よって, 母平均値 $\mathrm{E}[X(3)]$ は 1 と推定できる.
2. 標本分散 $s^2 = \frac{1}{10-1}((3-1)^2+\cdots+(-3-1)^2) = \frac{32}{9}$. よって母分散 $\mathrm{E}[X(3)]$ は $\frac{32}{9}$ と推定できる.
3. 標本期待値 $\overline{x(3)^3} = \frac{1}{10}(3^3+\cdots+(-3)^3) = \frac{29}{5}$. よって母期待値 $\mathrm{E}[X(3)^3]$ は $\frac{29}{5}$ と推定できる.
4. 標本期待値 $\overline{\mathbf{1}_{[X(3)>1]}(x)} = \frac{1}{10}(1+1+1+0+\cdots+0) = \frac{3}{10}$. よって母比率は $\frac{3}{10}$ と推定できる.

ここまで来たよ

1. 略解:確率過程とランダムウォーク
2. ランダムウォークの座標の母分布
   - ランダムウォークの座標の母分布と確率 $P(x,t)$
   - (方法 1-3)$P(x,t)$ をいっきに厳密に求めちゃおう
   - (方法 1-3') ランダムウォークの座標の母平均値と母分散

ランダムウォークの定義 (復習)

ランダムウォーカーの時刻 t の座標 $X(t)$ は漸化式

$$X(t+1) = X(t) + R(t+1), \quad X(0) = 0.$$

に従う. $R(t)$ $(t = 1, 2, \ldots, T)$ は独立同分布に従う確率変数.
例えば,

$R(t)$	確率
-1	$q = 1 - p = \frac{2}{3}$
$+1$	$p = \frac{1}{3}$

確率や期待値を求めたい

いくつかの作戦

- (方法 1-1) 手計算で $P(X(t)=x)$ を求める.
- (方法 1-3) 2 項定理から $P(X(t)=x)$ をいっきに式で書いちゃう 計算科学 II
- (方法 1-3') ランダムウォークの性質を使って, $\mathrm{E}[X(t)], \mathrm{V}[X(t)]$ を簡単に求めちゃう. 計算科学 II, 確率統計 II
- (方法 1-2) ランダムウォークの性質と中心極限定理で, $P(X(t)=x)$ を $T\to\infty$ の極限で近似的に求める. 計算科学 II, 確率統計 II
- (方法 1-4) 母関数の方法でなんでも求めちゃう 計算科学 II, 確率統計 II
- (方法 2) 計算機と乱数で標本抽出と推定でやっちゃえ $\to$ 確率過程の確率シミュレーション 計算科学 II

ランダムウォークの座標の母分布

$R(t)$	確率
-1	$\frac{2}{3}$
0	0
1	$\frac{1}{3}$

$\rightsquigarrow$

$X(0)$	確率
$\vdots$	0
-2	0
-1	0
0	1
1	0
2	0
3	0
$\vdots$	$\vdots$

$X(1)$	確率
$\vdots$	0
-2	0
-1	$\frac{2}{3}$
0	0
1	$\frac{1}{3}$
2	0
3	0
$\vdots$	$\vdots$

$X(2)$	確率
$\vdots$	0
-2	$\frac{4}{9}$
-1	0
0	$\frac{4}{9}$
1	0
2	$\frac{1}{9}$
3	0
$\vdots$	$\vdots$

$\cdots$

略記: $P(X(t)=x)=P(x,t)$

$X(t)$	確率
$\vdots$	$\vdots$
-1	$P(-1,t)$
0	$P(0,t)$
1	$P(1,t)$
2	$P(2,t)$
3	$P(3,t)$
$\vdots$	$\vdots$

確率 $P(x,t)$

x: 座標 (整数), t: 時刻 (整数)

$P(x,t)=$ 時刻 t に, ウォーカーが x にいる確率.

性質

ここまで来たよ

1. 略解:確率過程とランダムウォーク

2. ランダムウォークの座標の母分布
   - ランダムウォークの座標の母分布と確率 $P(x,t)$
   - (方法 1-3)$P(x,t)$ をいっきに厳密に求めちゃおう
   - (方法 1-3') ランダムウォークの座標の母平均値と母分散

(方法 1-3)$P(x,t)$ をいっきに厳密に求めちゃおう

(確率 1 で)$X(0) = 0.$
時刻 $1, \ldots, t$ の t 回移動する. t 回中, k 回は $+1$ 方向に移動, $t-k$ 回は -1 方向に移動すると, $x = 0 + (+1) \times k + (-1) \times (t-k) = 2k - t$ に到達する.

- 特定のサンプルパスで到達する確率 $\boxed{}$.
- 到達するサンプルパスの個数 (場合の数) $\boxed{}$

$$P(x,t) = \begin{cases} {}_t\mathrm{C}_{\frac{t+x}{2}} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t+x}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t-x}{2}} & (x = -t, -t+2, -t+4, \ldots, t-2, t) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}.$$

L03-Q1

$P(x,t)$

このランダムウォークで, $t = 10$ に, $x = 6, 9$ に到達する確率をそれぞれ求めよう.

2 項係数と 2 項定理の復習

2 項係数 (binomial coefficient)

t 個のものから k 個を選び出す場合の数は

$$\binom{t}{k} = {}_t\mathrm{C}_k = \frac{t!}{k!(t-k)!}$$

2 項定理

$$(a+b)^t = \sum_{k=0}^{t} {}_t\mathrm{C}_k a^k b^{t-k}$$

L03-Q2

Quiz($P(x,t)$ の意味)

次のうち, 確率 $P(x,t)$ について正しいものをいくつでも答えよう.

1. $P(x,t)$ を x について加えると 1 になる.
2. $P(x,t)$ を t について加えると 1 になる.
3. $P(x,t)$ を x,t の両方について加えると 1 になる.
4. $P(x,t)$ の値は座標で単位は m である.
5. $P(x,t)$ の値は時刻で単位は秒である.
6. $P(x,t)$ の値は確率で単位はない.

L03-Q3

Quiz(ランダムウォークの確率と座標の期待値)

$p = \frac{1}{3}$ のとき,

1. $X(100) = 0$ となる確率, $X(100) = 1$ となる確率をそれぞれ求めよう (整理したり約分したりしなくてよい).
2. 確率 $P(X(100) \geq 98)$ を求めよう (整理したり約分したりしなくてよい).
3. $\mathrm{E}[R(1)]$ を求めよう.
4. $\mathrm{V}[R(1)]$ を求めよう.
5. $\mathrm{E}[X(100)]$ を求めよう.
6. $\mathrm{V}[X(100)]$ を求めよう.
7. $X(100)$ の母標準偏差を求めよう.

ここまで来たよ

1. 略解:確率過程とランダムウォーク
2. ランダムウォークの座標の母分布
   - ランダムウォークの座標の母分布と確率 $P(x,t)$
   - (方法 1-3)$P(x,t)$ をいっきに厳密に求めちゃおう
   - (方法 1-3') ランダムウォークの座標の母平均値と母分散

ランダムウォークの座標 $X(T)$ の母平均値と母分散

$$X(T) = 0 + \sum_{t=1}^{T} R(t).$$

$R(t)$ $(t = 1, 2, \ldots, T)$ は独立同分布, $\mathrm{E}[R(t)] = \mu$,$\mathrm{V}[R(t)] = \sigma^2$ とする.

$X(T)$ の母平均値

期待値 E の性質から,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[X(T)] =& \mathrm{E}[R(1) + R(2) + \cdots + R(T)] \\ =& \mathrm{E}[R(1)] + \mathrm{E}[R(2)] + \cdots + \mathrm{E}[R(T)] = T \times \mu.\end{aligned}$$

直観的解釈:

$X(T)$ の母分散
$R(t)$ が互いに独立なので

$$\begin{aligned}\mathrm{V}[X(T)] =&\mathrm{V}[R(1)+R(2)+\cdots+R(T)]\\ =&\mathrm{V}[R(1)]+\mathrm{V}[R(2)]+\cdots+\mathrm{V}[R(T)] = T\times\sigma^2.\end{aligned}$$

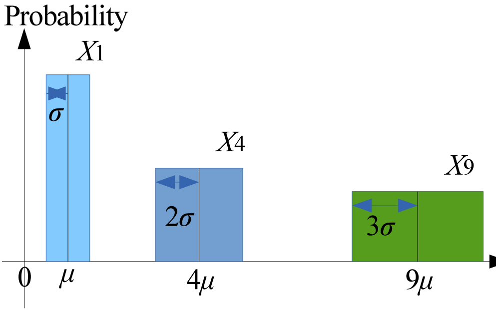
直観的解釈: $\boxed{}$

$X(T)$ の母標準偏差

$$\sqrt{\mathrm{V}[X(T)]} = \sqrt{T}\times\sigma.$$

直観的解釈: $\boxed{}$

ってことは, 確率分布の時間変化はこんな感じ?



いつでもこんな長方形? 待て中心極限定理

L03-Q4

Quiz(離散的なランダムウォークの確率・平均値・分散・標準偏差)

ランダムウォークを表す次の数列を考える.

$$X(t+1) = X(t) + R(t+1), \qquad X(0) = 0.$$

ただし, $R(t+1)$ は独立同分布に従い, 確率 p で $R = -3$, 確率 $1-p$ で $R = +1$ の値をとる $(0 < p < 1)$. 次のうち正しいものの記号をすべて答えよう.

1. $X(t)$ は t に比例する.
2. $X(t)$ の母平均値は t に比例する.
3. $X(t)$ の母分散は t に比例する.
4. $\mathrm{e}^{X(t)}$ の母期待値は t に比例する.
5. $X(t)$ の母標準偏差は t に比例する.

予習問題

火 23:55 締切の予習問題 x1 RaMMoodle

`https://el.math.ryukoku.ac.jp/moodle/`

manaba 出席カード提出

`https://attend.ryukoku.ac.jp`

演習の春のプチテスト 2015-05-20 水 3