確率 $P(x,t)$ のモーメント母関数 $M(\lambda,t)$

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆演習 II L05(2015-05-08 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2015-05-08 Fri 13:49 JST hig"

今日の目標

- ランダムウォークの説明から, モーメント母関数 $M(\lambda,t)$ を求められる.
- (Excel を使わずに) ランダムウォークの座標の母期待値や比率を計算する C のプログラムが書ける

http://hig3.net

L05-S1

Quiz 解答:離散的なランダムウォークの確率の漸化式

$$
\begin{aligned}
P(x,t+1) =& \frac{1}{7} \times P(x-2,t) + \frac{2}{7} \times P(x,t) + \frac{4}{7} \times P(x+1,t), \\
P(x,5) =& \begin{cases} 1 & (x=2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

L05-S2

Quiz 解答:離散的なランダムウォークの確率の漸化式

$$
\begin{aligned}
P(x,t+1) =& \frac{1}{8} \times P(x-1,t) + \frac{4}{8} \times P(x,t) + \frac{3}{8} \times P(x+2,t), \\
P(x,3) =& \begin{cases} 1 & (x=2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

L05-S3

Quiz 解答:2 項係数の漸化式

$t \backslash x$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0.5	0	0.5	0	0	0	0
1	0	0	0.4	0	0.5	0	0.1	0	0	0
2	0	0.32	0	0.48	0	0.18	0	0.02	0	0

ここまで来たよ

確率 $P(x,t)$ の復習

確率 $P(x,t)$

x: 座標 (整数), t: 時刻 (整数)
定義 $P(x,t)$ とは, 時刻 t に, ウォーカーが x にいる確率 $P(X(t)=x)$.
性質 $\displaystyle\sum_{x=-\infty}^{+\infty} P(x,t) = 1. \quad (t: \text{任意})$

$t\backslash x$	$\cdots$	-1	0	1	2	$\cdots$	x	$\cdots$
0	0	0	1	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$
1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\cdots$	0	$\cdots$
2	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$\vdots$								
t							$P(x,t)$	
$\vdots$								

$P(x,t)$ の漸化式

例

$X(t+1)=X(t)+R(t+1)$, $R=$

R	確率
-1	$q=1-p$
$+1$	p

, $X(0)=10$ のとき, $P(x,t)$ の漸化式と初期条件は,

$$P(x,t+1)=pP(x-1,t)+qP(x+1,t), \qquad P(x,0)=\begin{cases}1 & (x=10)\\ 0 & (x\neq 10)\end{cases}.$$

$P(x,t)$ の一般項を求めたい.
高校での数列 $a_{t+1}=Aa_t+B$ と比べると $\boxed{}$

ここまで来たよ

モーメント母関数 $M(\lambda,t)$ の定義

誰かの思いついた超絶技巧 漸化式の両辺に

1. $\mathrm{e}^{\lambda x}$ をかける
2. x について加える

つまり, 両辺に, 左から, $\boxed{}$ を 'かける'

$$\sum_{x=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda x} P(x,t+1) = p \sum_{x=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda x} P(x-1,t) + q \sum_{x=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda x} P(x+1,t).$$

$$\text{モーメント母関数 } M(\lambda,t) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda \cdot x} P(x,t).$$

モーメント母関数とは, 数列を '関数' にパッケージしたもの. 生成関数とも. $M_{X(t)}(\lambda)$ が正式な表記.

ところで, M, λ ってなに? $M(0,t) = 1$

ラグランジュの未定乗数みたいなもの. Z 変換. ラプラス変換 微積分, 数理モデル基礎 I, ディジタル信号処理, 確率統計 II

左辺 $= M(\lambda, t+1)$ そのもの

右辺第 1 項も M で書きたい! そのままじゃだめ.

同様に, 右辺第 2 項は,

$= q\mathrm{e}^{-\lambda} M(\lambda, t).$
結局, 漸化式は,

$$M(\lambda, t+1) = (p\mathrm{e}^{+\lambda} + q\mathrm{e}^{-\lambda}) M(\lambda, t)$$

あれっ

ただの じゃん.

ある意味 '対角化'

線形代数

公式から,

$$M(\lambda, t) = (p\mathrm{e}^{+\lambda} + q\mathrm{e}^{-\lambda})^t \times M(\lambda, 0)$$

ここまで来たよ

1. 略解:確率 $P(x,t)$ の漸化式
2. 確率 $P(x,t)$ のモーメント母関数 $M(\lambda,t)$
   - 確率 $P(x,t)$ の復習
   - モーメント母関数の定義
   - $M(\lambda,t)$ の初項
   - $P(x,t)$ を回復
3. 確率シミュレーション
   - 確率シミュレーション

$M(\lambda,t)$ の初項

$$P(x,0)=\begin{cases}1 & (x=10)\\ 0 & (x\neq 10)\end{cases} \rightsquigarrow M(\lambda,0)=\sum_{x=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\lambda\cdot x}P(x,0)=\boxed{}$$

結局

$$M(\lambda,t)=(p\mathrm{e}^{+\lambda}+q\mathrm{e}^{-\lambda})^t\times\mathrm{e}^{10\lambda}$$

このへんの問題では，モーメント母関数 $M(\lambda,t)$ のことを，生成関数 $Z(\lambda,t)$ と書いています．同じものです．
L05-Q1

Quiz($P(x,t)$ の意味)

x の次元を m，t の次元を秒とする．次のうち，生成関数 $Z(\lambda,t)$ について正しいものをいくつでも答えよう．

1. $Z(\lambda,t)$ の λ の単位は m である．
2. $Z(\lambda,t)$ の λ の単位は 1/m である．
3. $Z(\lambda,t)$ の λ の単位は秒である．
4. $Z(\lambda,t)$ の単位は秒である．
5. $Z(\lambda,t)$ の単位は 1/秒である．
6. $Z(\lambda,t)$ は単位のない数である．

L05-Q2

Quiz(生成関数)

時刻 $t=0$ に $x=0$ から出発し, 各時間ステップ t で確率 $\frac{3}{9}$ で x から $x+1$ に, 確率 $\frac{5}{9}$ で x から $x-1$ に移動, 確率 $\frac{1}{9}$ で x にとどまるような, ペンギンのランダムウォークを考える.
時刻 t に, x にペンギンがいる確率を $P(x,t)$ とする.

1. 生成関数 $Z(\lambda,t)=\displaystyle\sum_{x=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\lambda x}P(x,t)$ の満たす漸化式と, 初項を求めよう.
2. 生成関数 $Z(\lambda,t)$ を求めよう.
3. 生成関数を展開して, $P(1,2)$ を求めよう.

ここまで来たよ

1. 略解:確率 $P(x,t)$ の漸化式
2. 確率 $P(x,t)$ のモーメント母関数 $M(\lambda,t)$
   - 確率 $P(x,t)$ の復習
   - モーメント母関数の定義
   - $M(\lambda,t)$ の初項
   - $P(x,t)$ を回復
3. 確率シミュレーション
   - 確率シミュレーション

$P(x,t)$ を回復

ここ, 今まで通り, $X(0)=10$ でもできるんだけど, 前とあわせるために, $X(0)=0$ としてやります.
$M(\lambda,t)=\mathrm{e}^{0\lambda}(p\mathrm{e}^{+\lambda}+q\mathrm{e}^{-\lambda})^t$.

Example

例題 $P(2,4)$ を求めたい!

作戦 1:項を探し出せ!
$M(\lambda,t)=(p\mathrm{e}^{+\lambda}+q\mathrm{e}^{-\lambda})^t$.
$P(2,4)$ は, $M(\lambda,4)=(p\mathrm{e}^{+\lambda}+q\mathrm{e}^{-\lambda})^4$ に含まれる $\mathrm{e}^{2\lambda}$ の項の係数.
展開してヒットな項を探すと,
$\boxed{}$ だけ.

$P(2,4)=\boxed{}$

作戦 2:ぜんぶ展開しちゃえ

2 項定理

$$(a+b)^t = \sum_{k=0}^{t} {}_t\mathrm{C}_k a^k b^{t-k}, \qquad {}_t\mathrm{C}_k = \binom{t}{k} = \frac{t!}{k!(t-k)!}$$

$$\begin{aligned} M(\lambda,t) =& (p\mathrm{e}^{+\lambda} + q\mathrm{e}^{-\lambda})^t \\ =& \sum_{k=0}^{t} {}_t\mathrm{C}_k p^k q^{t-k} \mathrm{e}^{\lambda(k-(t-k))} = \sum_{k=0}^{t} \mathrm{e}^{\lambda(2k-t)} {}_t\mathrm{C}_k p^k q^{t-k} \end{aligned}$$

$M(\lambda,t) = \displaystyle\sum_{x=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda \cdot x)} P(x,t)$ と比較すると, $x = 2k - t$. $k = (t+x)/2$

$$P(x,t) = M(\lambda,t) \text{ に現れる } \mathrm{e}^{\lambda x} \text{ の係数} = \begin{cases} {}_t\mathrm{C}_{\frac{t+x}{2}} p^{\frac{t+x}{2}} q^{\frac{t-x}{2}} & (t+x \text{ 偶数}) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

L05-Q3

Quiz(2 項分布でかける $P(x,t)$)

時刻 $t=0$ に原点 $x=0$ から出発し, 各時間ステップ t で確率 p で x から $x+1$ に, 確率 $q=1-p$ で x から $x-1$ に移動するランダムウォークを考える.

1. $t=2$ に到達する可能性のある位置 x とその確率を求めよう.
2. $t=4$ に到達する可能性のある位置 x とその確率を求めよう.
3. $t=10$ に $x=0$ に戻ってくる確率を求めよう.

ここまで来たよ

1. 略解:確率 $P(x,t)$ の漸化式
2. 確率 $P(x,t)$ のモーメント母関数 $M(\lambda,t)$
   - 確率 $P(x,t)$ の復習
   - モーメント母関数の定義
   - $M(\lambda,t)$ の初項
   - $P(x,t)$ を回復
3. 確率シミュレーション
   - 確率シミュレーション

 確率シミュレーション

$X(T)$ の標本抽出

```
                                   /*1*/
for(n){
                                   /*2*/
  for(t){
                                   /*3*/
    x=x+getrandom(getuniform());
                                   /*4*/
  }
                                   /*5*/
}
                                   /*6*/
```

問: `srand(seed)`, `x=0`, `printf("%d",x)` はどこ?

出力

$X(t)^{(n)}$

t:

(n):

	$t=0$	$t=1$	$\cdots$	$t=T$
$n=1$	$X(0)^{(1)}$	$X(1)^{(1)}$	$\cdots$	$X(T)^{(1)}$
$n=2$	$X(0)^{(2)}$	$X(1)^{(2)}$	$\cdots$	$X(T)^{(2)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n=N$	$X(0)^{(N)}$	$X(1)^{(N)}$	$\cdots$	$X(T)^{(N)}$

Excel を使わないで標本期待値の計算

$$\overline{\phi(X(T))} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\phi(X(T)^{(n)})$$

```
                              /*1*/
for(n){
                              /*2*/
  for(t){
                              /*3*/
    x=x+getrandom(getuniform());
                             /*4*/
  }
                              /*5*/
}
                              /*6*/
```

sum1=0, sum1+=phi(x), printf("%f",(double)sum1/nmax)?

比率 (確率) の推定

$$\text{比率 (確率) の推定値} = \overline{\mathbf{1}_{[\text{条件}]}(X(T))} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbf{1}_{[\text{条件}]}(X(T)^{(n)})$$

$$= \frac{N\ \text{個のうち `条件' が成立しているデータの個数}}{\text{サンプルサイズ}\ N}$$

manaba 出席カード提出
`https://attend.ryukoku.ac.jp`

数理情報学科オープンレクチャー
2015-05-20 水 11:05-12:35 1 号館 5 階 1-534
台湾への留学と中枢神経における呼吸モデルについて
演習の春のプチテスト
2015-05-20 水 3. 案内参照.
Math ラウンジ=チューター
月火水木昼, 1 号館 6 階 1-612 or 1-614.
Visual Studio の使い方や自宅インストールにも対応できます.