モーメント母関数 $M(\lambda, t)$ からの母期待値の計算

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆演習 II L06(2015-05-15 Fri)

最終更新: Time-stamp: "2015-05-15 Fri 09:33 JST hig"

今日の目標

- モーメント母関数 $M(\lambda, t)$ から確率 $P(x, t)$ を求められる
- モーメント母関数 $M(\lambda, t)$ から母期待値 $\mathrm{E}[X(t)^k]$ を求められる

http://hig3.net

L06-Q2
Quiz 解答:生成関数

1. P の漸化式は, $P(x,t+1)=\frac{3}{9}P(x-1,t)+\frac{1}{9}P(x,t)+\frac{5}{9}P(x+1,t)$.
   $P(x,0)=\begin{cases}1 & (x=0)\\ 0 & (x\neq 0)\end{cases}$. Z の漸化式は,
   $Z(\lambda,t+1)=(\frac{3}{9}\mathrm{e}^{\lambda}+\frac{1}{9}+\frac{5}{9}\mathrm{e}^{-\lambda})Z(\lambda,t)$, 初項は $Z(\lambda,0)=1$.
2. 一般項は, $Z(\lambda,t)=(\frac{3}{9}\mathrm{e}^{\lambda}+\frac{1}{9}+\frac{5}{9}\mathrm{e}^{-\lambda})^{t}$.
3. $Z(\lambda,2)$ の, e^{λ} の係数を考えて, $P(1,2)=2\cdot\frac{1}{9}\frac{3}{9}$

ここまで来たよ

1. 略解:確率 $P(x, t)$ からのモーメント母関数 $M(\lambda, t)$ の計算

2. モーメント母関数 $M(\lambda, t)$ からの母期待値の計算
   - $M(\lambda, t)$ から $P(x, t)$ を求める
   - $M(\lambda, t)$ から母期待値 $\mathrm{E}[X(t)^k]$ を求める

先週までのあらすじ

$\boxed{X(t)\text{ についての問題文}}$ $\overset{\text{プログラミング}}{\longrightarrow}$ `x+=getrandom(getuniform());`

↓ 頭で意味を考えて書き替え

$\boxed{P(x,t)\text{ の漸化式と初項}}$

↓ 形式的な式変形

$\boxed{M(\lambda,t)\text{ の漸化式と初項}}$

↓ 等比数列の一般項を求める

$\boxed{M(\lambda,t)\text{ の具体的な式}}$

↓ ?

$\boxed{?}$

$M(\lambda, t)$ から $P(x, t)$ を求める

時刻 t に x にいる確率

$$P(X(t) = x) = P(x, t)$$

X のモーメント母関数

$$M(\lambda, t) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda x} P(x, t)$$

Example

例題 $M(\lambda, t) = \mathrm{e}^{0\lambda}(p\mathrm{e}^{+\lambda} + q\mathrm{e}^{-\lambda})^t$ のとき, $P(2, 4)$ を求めたい!
今まで通り, $X(0) = 10$ でもできるんだけど, 上の M では, 前とあわせるために, $X(0) = 0$ としてます.

作戦 1:項を探し出せ!

$M(\lambda, t) = (p\mathrm{e}^{+\lambda} + q\mathrm{e}^{-\lambda})^t$.

$P(2, 4)$ は, $M(\lambda, 4) = (p\mathrm{e}^{+\lambda} + q\mathrm{e}^{-\lambda})^4$ に含まれる $\mathrm{e}^{2\lambda}$ の項の係数.

展開してヒットな項を探すと,

$\boxed{}$ だけ.

$P(2, 4) = \boxed{}$

作戦 2:展開しちゃえ

2 項定理

$$(a+b)^t = \sum_{k=0}^{t} {}_t\mathrm{C}_k a^k b^{t-k}, \qquad {}_t\mathrm{C}_k = \binom{t}{k} = \frac{t!}{k!(t-k)!}$$

$$\begin{aligned} M(\lambda, t) =& (p\mathrm{e}^{+\lambda} + q\mathrm{e}^{-\lambda})^t \\ =& \sum_{k=0}^{t} {}_t\mathrm{C}_k p^k q^{t-k} \mathrm{e}^{\lambda(k-(t-k))} = \sum_{k=0}^{t} \mathrm{e}^{\lambda(2k-t)} {}_t\mathrm{C}_k p^k q^{t-k} \end{aligned}$$

$M(\lambda, t) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda \cdot x)} P(x, t)$ と比較すると, $x = 2k - t.\ k = (t+x)/2$

$$P(x, t) = M(\lambda, t) \text{ に現れる } \mathrm{e}^{\lambda x} \text{ の係数} = \begin{cases} {}_t\mathrm{C}_{\frac{t+x}{2}} p^{\frac{t+x}{2}} q^{\frac{t-x}{2}} & (t+x \text{ 偶数}) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

L06-Q1

Quiz(生成関数)

ランダムウォークの座標 $X(t)$ のモーメント母関数が $M(\lambda,t) = \mathrm{e}^{10\lambda} \times (p\mathrm{e}^{\lambda} + q\mathrm{e}^{-\lambda})^t$ であるとする $(p+q=1)$.

1. 確率 $P(9,3) = P(X(3)=9)$ を求めよう.
2. 確率 $P(9,t) = P(X(t)=9)$ を求めよう (階乗を計算したり約分したりしなくていい).

ここまで来たよ

1. 略解:確率 $P(x,t)$ からのモーメント母関数 $M(\lambda,t)$ の計算
2. モーメント母関数 $M(\lambda,t)$ からの母期待値の計算
   - $M(\lambda,t)$ から $P(x,t)$ を求める
   - $M(\lambda,t)$ から母期待値 $\mathrm{E}[X(t)^k]$ を求める

$M(\lambda,t)$ から母期待値 $\mathrm{E}[X(t)^k]$ を求める

わかってる $\longleftrightarrow$ 求めたい (例)

$$M(\lambda,t)=\sum_{x=-\infty}^{x=+\infty}\mathrm{e}^{\lambda x}P(x,t)\longleftrightarrow\mathrm{E}[X(t)]=\sum_{x=-\infty}^{+\infty}xP(x,t)$$

- 左は x 足りない $\rightsquigarrow$ $\frac{\partial}{\partial\lambda}$ かけろ
- 左は $\mathrm{e}^{\lambda x}$ じゃま $\rightsquigarrow$ $\lambda=0$ とおけ

また誰かの思いついた超絶技巧

$$\left.\frac{\partial}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0}M(\lambda,t)=\left.\frac{\partial}{\partial\lambda}\sum_{x=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\lambda x}P(x,t)\right|_{\lambda=0}$$

$$=\left.\sum_{x=-\infty}^{+\infty}x\mathrm{e}^{\lambda x}P(x,t)\right|_{\lambda=0}=\sum_{x=-\infty}^{+\infty}x\;P(x,t)$$

計算例 母平均値 $n = 1$

$\mathrm{E}[X(t)] =$

答え合わせ まえにやったんだった.

$X(0) = 0$ なら, $\mathrm{E}[X(t)] = t \times \mathrm{E}[R_1]$.

$M(\lambda,t)$ から母期待値を求める

巾 $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して, 母期待値 $\mathrm{E}[X(t)^k]$ は, モーメント母関数から次のように求められる.

$$\mathrm{E}[X(t)^k] = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} M(\lambda,t)\Big|_{\lambda=0}$$

$\mathrm{E}[X(t)^2] = ?$

別の理解のしかた: $M(\lambda,t) = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{\lambda X(t)}]$.

L06-Q2

Quiz(モーメント母関数)

ペンギンのランダムウォークを考える．ペンギンの時刻 t における座標は確率変数であり $X(t)$ とかく．
ペンギンは時刻 $t=2$ に $x=3$ から出発し，各時間ステップ t で，確率 $\frac{3}{9}$ で x から $x+1$ に移動，確率 $\frac{5}{9}$ で x から $x-1$ に移動，確率 $\frac{1}{9}$ で x にとどまる．
時刻 t に，ペンギンが x にいる確率を $P(x,t)$ とする．

1. 確率 $P(x,t)$ の満たす漸化式と初項を求めよう．
2. $X(t)$ のモーメント母関数 $M(\lambda,t)$ の満たす漸化式と，初項を求めよう．
3. 漸化式を解いて，モーメント母関数 $M(\lambda,t)$ の具体的な形を求めよう．
4. モーメント母関数 $M(\lambda,t)$ を展開して，$P(100,100)$ を求めよう．
5. モーメント母関数から $\mathrm{E}[X(t)]$ を求めよう．
6. モーメント母関数から $\mathrm{V}[X(t)]$ を求めよう．

manaba 出席カード提出
`https://attend.ryukoku.ac.jp`

演習の春のプチテスト

2015-05-20 水 3. 案内参照.

Math ラウンジ=チューター

月火水木昼.
Visual Studio の使い方や自宅インストールにも対応できます.

予習問題 (プチテスト特別ルール)

講義演習あわせて, e ラーニング RaMMoodle
`https://el.math.ryukoku.ac.jp/moodle/` での予習問題の次回の締切は, 2015-05-22 金 11:05