

1

波動方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) = 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \quad (1)$$

を考える。次の関数は解であるか、それとも解でないか。理由をつけて答えよう。

1. $f(x, t) = \sin(x)e^{-\sqrt{2}t}$.
2. $f(x, t) = \sin(x) \cos(\sqrt{2}t)$.
3. $f(x, t) = e^{-x^2+2\sqrt{2}xt-2t^2}$.

2

波動方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) = v^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \quad (2)$$

の(講義で説明した)差分解法を考えよう。

1. x 方向の刻みを Δx , t 方向の刻みを Δt としよう。差分解法が安定であるための条件を答えよう。
2. 次の文のうち、上の条件が成立しないと安定でない理由として適切なものはどれか。ちょうど2つだけ選ぼう。
 - (a) 実際の波の速度は v だが、差分法では過去の影響はこれより遅い速度でしか伝わらないから。
 - (b) 実際の波の速度は v だが、差分法では過去の影響がそれよりも速く伝わってしまう可能性があるから。
 - (c) 実際の波では現在の点 (x, t) に影響を与えないのに、差分法では影響を与える可能性があるような過去の点が存在するから。
 - (d) 実際の波では現在の点 (x, t) に影響を与えるのに、差分法では影響を与られないような過去の点が存在するから。
3. $v = 0.1$ のとき、領域 $0 \leq t \leq 10, 0 \leq x \leq 1$ について、波動方程式の解を t 方向の刻み $\Delta t = 0.1$ で差分法で計算したい。計算が不安定にならないためには、 x 方向には何個に分割すればよいか。何個以上、あるいは何個以下、あるいはちょうど何個などと答えよう。

²<mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp>, <http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/>,
へや 1-508, でんわ 077-543-7501

3

講義で説明した差分解法を用いて、波動方程式を解いて $f_{i,n} = f(i\Delta x, n\Delta t)$ を求めることを考える。簡単のため、 x 方向の分割の数 (xinterval) を 7 として考えよう。 $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. n = 0, 1, 2, 3, \dots$

初期条件, 境界条件として, $f_{i0}, f_{i1}, f_{0n}, f_{7n}$ は与えられている (差分解の式を使って求めなくてよい) とする。

$n \setminus i$	0	1	2	3	4	5	6	7
5
4
$f_{i,n} =$ 3
2
1
0

1. f_{24} を, 差分解の式を (1 回だけ) 使って計算するには, 以前の時刻の 4 つの f_{in} がわかっていればよい。解答用紙にそれらを \times でマークしよう。
2. f_{24} を考える。初期条件, 境界条件 $f_{i0}, f_{i1}, f_{0n}, f_{7n}$ のうち, あるものを変更したところ, f_{24} の値も変わった。このような初期条件, 境界条件は, $f_{i0}, f_{i1}, f_{0n}, f_{7n}$ のうちどれか。解答用紙にそれらをすべて \circ でマークしよう。考えるのに使った補助線があれば書き込もう。

4

減衰のある波動方程式

$$\rho \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) = T \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) - \gamma \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \quad (3)$$

を考える。 ρ, T, γ は定数。

t 方向の刻みを Δt , x 方向の刻みを Δx として, $f_{i,n} = f(i\Delta x, n\Delta t)$ とおく。

この間の中に出てこない記号を使うときは, 出てくる記号を使って定義を書くこと。

以下, 正しい答えが複数あるときは, どれかひとつを答えればよい。

1. $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ を差分化して, $f_{i,n}$ で表そう。
2. この減衰のある波動方程式を差分化したものを書こう。
3. 上の答えを, $f_{i,n+1}$ について解いて, $f_{i,n+1}$ を $f_{\bullet,n}, f_{\bullet,n-1}$ で表そう。

計算科学³テストブチ略解

龍谷大学理工学部数理情報学科 2002年06月07日樋口さぶろお⁴

1

1. 解でない. なぜなら,

$$\text{左辺} = (-\sqrt{2})^2 \sin(x)e^{-\sqrt{2}t}. \quad (4)$$

$$\text{右辺} = 2 \times (-\sin(x)e^{-\sqrt{2}t}) \neq (\text{左辺}). \quad (5)$$

2. 解である. なぜなら,

$$\text{左辺} = (\sqrt{2})^2 \sin(x)(-\cos(\sqrt{2}t)). \quad (6)$$

$$\text{右辺} = 2 \times (-\sin(x)) \cos(\sqrt{2}t). \quad (7)$$

3. 解である. なぜなら,

$$f(x, t) = e^{-(x-\sqrt{2}t)^2} \quad (8)$$

とダランベールの解の形に書ける. 両辺を計算しても可.

2

1. $v \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$.

2. (a),(d).

3. 分割数を X とすると, 安定性の条件は,

$$1 \geq v \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.1 \cdot \frac{0.1}{1/X} \quad (9)$$

より, $X \leq 100$. 分割数は 100 個以下でなければならない.

3

1. $f_{i, n+1}$ を求めるのに必要なのは, $f_{i, n}, f_{i \pm 1, n}, f_{i, n-1}$ なので, $f_{1,3}, f_{2,3}, f_{3,3}, f_{2,2}$.

2. 下に斜め 45° で影響受ける範囲が広がっていく.

$n \setminus i$	0	1	2	3	4	5	6	7
5
4
$f_{i,n} =$ 3	.	x	x	x
2	o	.	x
1	o	o	o	o	o	o	.	.
0	.	o	o	o	o	.	.	.

⁴<mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp>, <http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/>,
へや 1-508, でんわ 077-543-7501

4

1.

$$\frac{f_{i\ n+1} - f_{i\ n}}{\Delta t}. \quad (10)$$

2.

$$\rho \frac{f_{i\ n+1} - 2f_{i\ n} + f_{i\ n-1}}{(\Delta t)^2} = T \frac{f_{i+1\ n} - 2f_{i\ n} + f_{i-1\ n}}{(\Delta x)^2} - \gamma \frac{f_{i\ n+1} - f_{i\ n}}{\Delta t}. \quad (11)$$

3.

$$f_{i\ n+1} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma \Delta t}{\rho}} \left[2f_{i\ n} - f_{i\ n-1} + \frac{T}{\rho} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (f_{i+1\ n} - 2f_{i\ n} + f_{i-1\ n}) - \frac{\gamma \Delta}{\rho} f_{i\ n} \right]. \quad (12)$$