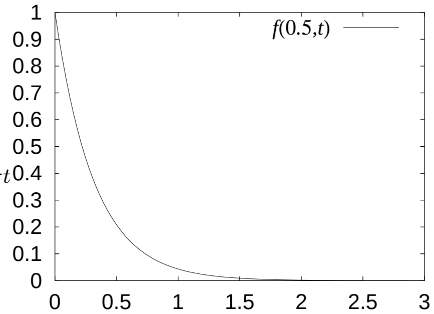
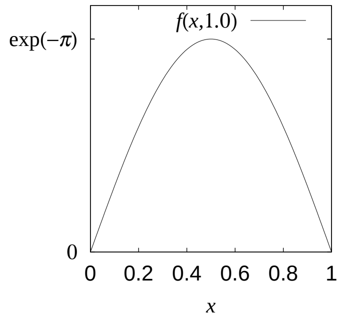
計算科学/実習[1] 龍谷大学理工学部数理情報学科 2002 年 05 月 31 日樋口さぶろお[2]

- 数理情報演習履修説明会 2002/06/06(木) 16:50-18:20. 1-107.
- 計算科学テストプチ 2002/06/07(金) 11:00-11:45 範囲 波動方程式とその差分解法

6 先週の quiz





1. 解になっていること.

$$\text{左辺} = (-\pi)^2 \sin(\pi x) \mathrm{e}^{-\pi t}. \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\text{右辺} &= -\pi^2 \sin(\pi x) \mathrm{e}^{-\pi t} - 2\pi \cdot (-\pi) \sin(\pi x) \mathrm{e}^{-\pi t} \\ &= +\pi^2 \sin(\pi x) \mathrm{e}^{-\pi t}.\end{aligned} \tag{2}$$

境界条件を満たすこと.

$$f(0,t) = \sin(0) \mathrm{e}^{-\pi t} = 0, \tag{3}$$

$$f(1,t) = \sin(\pi) \mathrm{e}^{-\pi t} = 0. \tag{4}$$

2. $f(0.5,t) = \sin(\pi/2) \mathrm{e}^{-\pi t} = \mathrm{e}^{-\pi t}$.

3. $f(x, 1.0) = \sin(\pi x) \mathrm{e}^{-\pi} = \sin(\pi x)$.

[1] `http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/compsci/`

[2] `mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp`, `http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/`, へや 1-508, でんわ 077-543-7501

7 今週の quiz

7.1

領域 $0 \le x \le 1, 0 \le t \le 1$ で 波動方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) \tag{5}$$

と, 関数 $f(x,t) = \sin(\frac{3}{2}\pi x)\cos(\frac{3}{2}\pi v t)$ を考えよう.

1. $f(x,t)$ が解であることを示そう.
2. $f(x,t)$ が, $x=0$ で固定端, $x=1$ で自由端の境界条件を満たすことを示そう.
3. $f(x,t)$ が, 初期条件

$$f(x,0) = \sin(\tfrac{3}{2}\pi x), \qquad \frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = 0 \tag{6}$$

を満たすことを示そう.

7.2

波動方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) \tag{7}$$

の (実習で使用している, 下の問に出てくる) 差分解法を考えよう.

1. x 方向の刻みを Δx, t 方向の刻みを Δt としよう. 差分解法が安定であるための条件を書こう (理由は省略してよい)
2. $v = 0.1$ のとき, 領域 $0 \le x \le 1$ で, $\Delta x = 0.01$ で解くとしよう. $t = 0$ で初期条件を与えて, $t = 10$ までの f の値を差分解法で安定に計算するには, t 方向には, いくつの点に分割すればよいか答えよう.

7.3

$f(x,t)$ を 2 変数関数としよう. x 方向の刻みを Δx, t 方向の刻みを Δt としよう. 点 $(x,t) = (j\Delta x, n\Delta t)$ での f の値を $f_{jn} = f(j\Delta x, n\Delta t)$ とかこう. 以下の問は, $f_{jn}, f_{j\pm1\,n}, f_{j\,n\pm1}$ などを使って答えよう.

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(j\Delta x, n\Delta t)$ の差分近似式をかこう.
2. $\frac{\partial f^2}{\partial t^2}(j\Delta x, n\Delta t)$ の差分近似式をかこう.
3. 波動方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) \tag{8}$$

を差分近似し, $f_{j\,n+1}$ を $f_{j\,n}, f_{j\pm1\,n}, f_{jn-1}$ を使って表そう.

7　今週の quiz の略解

7.1

1.

$$(\text{左辺}) = -\left(\tfrac{3}{2}\pi v\right)^2 \sin(\tfrac{3}{2}\pi x)\cos(\tfrac{3}{2}\pi v t) = (\text{右辺}) \tag{9}$$

2.

$$f(0,t) = 0 \quad \text{よって固定端} \tag{10}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,t) = 0 \quad \text{よって自由端} \tag{11}$$

3. 略.

7.2

1.

$$v \cdot \Delta t \cdot \frac{1}{\Delta x} \leq 1. \tag{12}$$

2. T 個に分割するとすると, $\Delta t = 10/T$. よって条件は

$$0.1 \cdot 10/T \cdot 1/0.01 \leq 1. \quad \text{より} \quad T \geq 100. \tag{13}$$

7.3

1.

$$\frac{f_{j+1\,n} - f_{jn}}{\Delta x}. \tag{14}$$

2.

$$\frac{f_{j\,n+1} - 2f_{jn} + f_{j\,n-1}}{(\Delta t)^2}. \tag{15}$$

3.

$$f_{j\,n+1} = \left(v\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (f_{j+1\,n} - 2f_{jn} + f_{j-1\,n}) + 2f_{j\,n} - f_{j\,n-1} \tag{16}$$