計算科学[1]前期期末試験

龍谷大学理工学部数理情報学科　2002 年 07 月 26 日樋口さぶろお[2]

- **理由, 過程を記すように指定がある問以外は**理由, 過程を省略してよいが, どの問も, 理由, 過程が記してある場合, 部分点を与えることがある.
- 問には, 問題に現れる記号だけを使って答えよう. 自分で導入した記号を用いる場合は, 定義を記そう.

1

次の 2 変数関数 $f(x,t)$ は拡散方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = D \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) \tag{1}$$

($D > 0$ は定数) の解であるか解でないか, **理由をつけて**答えよう.

1. $f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4Dt}}$
2. $f(x,t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{T}} \sin(\frac{1}{\sqrt{TD}}x)$　(T は定数)
3. $f(x,t) = \sin(x - vt)$　($v > 0$ は定数)

2

区間 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq t < \infty$ で, 拡散方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = D \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) \tag{2}$$

($D > 0$ は定数) を考える. 初期条件を, $f(x,0) = 1 - \cos(\pi x)$ とする.

1. $x = 0, 1$ にディリクレ境界条件 $f(0,t) = 0, f(1,t) = 2$ が課されているとき.
2. $x = 0, 1$ にノイマン境界条件 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,t) = 0$ が課されているとき.

の 2 つの場合に $f(x,t)$ のグラフを, 縦軸 f 横軸 x で, 直観的に描こう (式で計算しなくてもよい). ただし t の値は,

- $t = 0$ のとき,
- $0 < t < +\infty$ でそれなりの大きさのとき,
- $t \to \infty$

の場合を重ねて描こう.

[1] `http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/compsci/`

[2] `mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp`, `http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/`, へや 1-508, でんわ 077-543-7501

3

拡散方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = D \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) \tag{3}$$

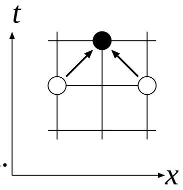
($D > 0$ は定数) と波動方程式

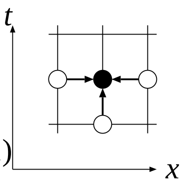
$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) \tag{4}$$

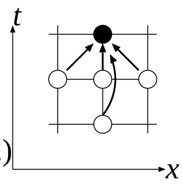
($v > 0$ は定数) の差分解法を考える. 解を $f(x,t)$ について, 空間 x, 時間 t 方向の刻みを $\Delta x, \Delta t$ とし, $f(i\Delta x, n\Delta t) = f_{i\,n}$ とかく.

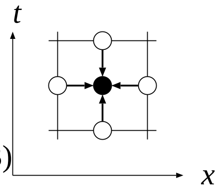
1. 波動方程式の差分解法について考える.
   (a) 解答群 A の中で, 対応するものを選ぼう.
   (b) 解答群 B の中で, 講義で説明した波動方程式の差分解法について正しいものをすべてあげよう.
2. 拡散方程式の陰解法 (講義で第 11 回 2002/06/28 に説明した差分解法) について考える.
   (a) 解答群 A の中で, 対応するものを選ぼう.
   (b) 解答群 B の中で, 陰解法について正しいものをすべてあげよう.
3. 拡散方程式の陽解法 (講義で第 7 回 2002/05/31 に説明した差分解法) について考える.
   (a) 解答群 A の中で, 対応するものを選ぼう.
   (b) 安定性の条件を答えよう.
   (c) $D = 0.01$ のとき, 領域 $0 \leq x \leq 2, 0 \leq t \leq 1$ で, $\Delta t = 0.5$ で陽解法を用いて解くとしよう. $t = 0$ で初期条件を与え, $t = 1$ での f の値を安定に計算するには, x 方向に, いくつの区間に分割すればよいか. 何個以上, 何個以下, ちょうど何個, などと, **理由とともに**答えよう.

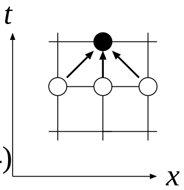
解答群 A

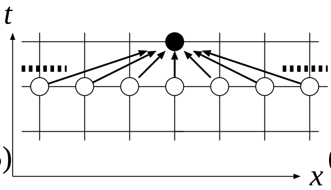
Ex.


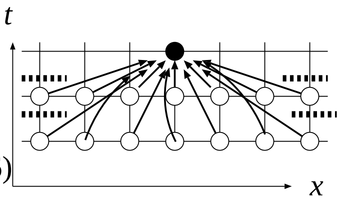
(1)


(2)


(3)


(4)


(5)


(6)


記号と図の説明: 差分解法では, $f_{i\,n}$ を漸化式を用いて次々に決めていく. 仮に, 差分化された式が

$$f_{i\,n+1} = C \times (f_{i-1\,n} + f_{i+1\,n}) \tag{5}$$

であったとしよう. このとき, 決めたいもの (●) が $f_{i\,n+1}$, 決めるのに使うもの (○) が $f_{i-1\,n}$, $f_{i+1\,n}$ なので, そのあいだを矢印で結んで図の Ex. のように表す.

解答群 B

(1) Δx を小さくしようとするとき, 安定に計算するためには, Δt もそれに応じて小さくしなければならない.

(2) $\Delta x, \Delta t$ に無関係に安定である. その理由は, $f_{i\,n+1}$ を計算する際にすべての $f_{j\,n}$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ の影響を受けるからである.

(3) 初期条件としては, 例えば, すべての x について $f(x, 0)$ と $\frac{\partial f}{\partial t}(x, 0)$ とを指定すればよい.

(4) $f_{i\,n}$ から $f_{i\,n+1}$ を求めるには, 3 重対角行列を係数行列とする連立 1 次方程式を解かなければならない

4

区間 $0 \leq x \leq 1$ で偏微分方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = D \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) \tag{6}$$

を境界条件

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) = 0 \quad \text{(ノイマン境界条件)} \tag{7}$$

$$f(1,t) = 3 \quad \text{(ディリクレ境界条件)} \tag{8}$$

のもとで, 陰解法によって解くことを考える. 刻みを $\Delta x = 0.25, \Delta t = 0.1$ とし, $f_{i\,n} = f(i\Delta x, n\Delta t)$ $(i = 0,1,2,3,4)$ とする.

1. 陰解法で用いられる, (6) を差分化した式を求めよう (左辺を後退差分, 右辺を前進差分で近似する).
2. 上の結果に $f_{i\,n} = U_n \cdot \mathrm{e}^{\sqrt{-1}\cdot k\cdot i}$ ($k > 0$ は定数) を代入し, U_n に対する漸化式を求めよう. **過程も示そう.**
3. 陰解法で, $f_{i\,n}$ $(i = 0,1,2,3,4), f_{4\,n+1}$ から, $f_{i\,n+1}$ $(i = 0,1,2,3)$ を求めるのに用いる連立 1 次方程式を考える. これを,

$$\begin{pmatrix} & & & \\ & C & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{0\,n+1} \\ f_{1\,n+1} \\ f_{2\,n+1} \\ f_{3\,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \tag{9}$$

とかいたときの 4×4 行列 C と ベクトル (g_0, g_1, g_2, g_3) を求めよう. ただし, C は f には依存しない. **過程も示そう.**

5

拡散方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = D \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) \tag{10}$$

($D > 0$ は定数) と波動方程式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) \tag{11}$$

($v > 0$ は定数) を考える.

1. 波動方程式の表す自然現象をひとつあげ, その場合に 関数 $f(x,t)$, 定数 v, 境界条件 $f(0,t) = 0$, 境界条件 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) = 0$ の意味を説明しよう.
2. 拡散方程式の表す自然現象をひとつあげ, その場合に 関数 $f(x,t)$, 定数 D, 境界条件 $f(0,t) = 0$, 境界条件 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) = 0$ の意味を説明しよう.

計算科学[3]前期期末試験略解

龍谷大学理工学部数理情報学科 2002 年 07 月 26 日樋口さぶろお[4]

1

1. 解である. 第 12 回 quiz 参照.
2. 解である.

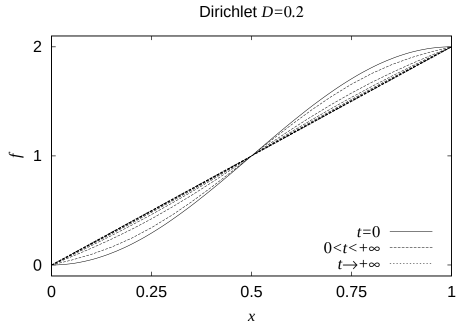
$$\text{左辺} = -\frac{1}{T}\mathrm{e}^{-t/T}\sin\left(\tfrac{1}{\sqrt{TD}}x\right) = \text{右辺}. \tag{12}$$

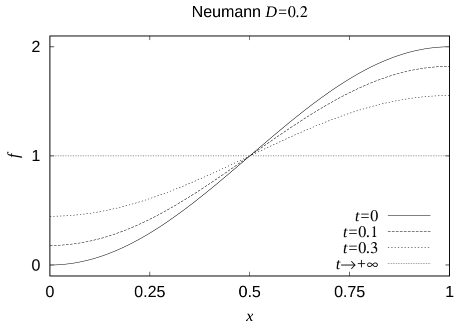
3. 解でない.

$$\text{左辺} = -v\cos(x - vt) \neq -D\cdot\sin(x - vt) = \text{右辺} \tag{13}$$

2

第 13 回 quiz 参照.





3

1. (a) (2)
   (b) (1),(3)
2. (a) (5)
   (b) (2),(4)
3. 第 13 回 quiz 参照.
   (a) (4)
   (b) $D\cdot\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$.
   (c) X 個の区間に分割するとすると, $\Delta x = 2/X$. よって安定性の条件は

$$0.01\frac{0.5}{(2/X)^2} \leq \tfrac{1}{2} \tag{14}$$

すなわち $X \leq 20$. 20 個以下に分割すればよい.

---

[3] http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/compsci/

[4] mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp, http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, へや 1-508, でんわ 077-543-7501

4

1.

$$\frac{f_{i\,n} - f_{i\,n-1}}{\Delta t} = D \cdot \frac{f_{i-1\,n} - 2f_{i\,n} + f_{i+1\,n}}{(\Delta x)^2} \tag{15}$$

このままでもよいが, $D_1 = D \cdot \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ とおいて, $n \mapsto n+1$ とすると,

$$-D_1 f_{i-1\,n+1} + (1+2D_1) f_{i\,n+1} - D_1 f_{i+1\,n+1} = f_{i\,n}. \tag{16}$$

2. 第 13 回講義参照. 代入すると,

$$U_{n+1}\left(-D_1 \mathrm{e}^{\sqrt{-1}k(i-1)} + (1+2D_1)\mathrm{e}^{\sqrt{-1}ki} - D_1 \mathrm{e}^{\sqrt{-1}k(i+1)}\right) = U_n \mathrm{e}^{\sqrt{-1}ki}. \tag{17}$$

両辺を $\mathrm{e}^{\sqrt{-1}ki}$ で割ると,

$$U_{n+1}(-D_1 \mathrm{e}^{-\sqrt{-1}k} + (1+2D_1) - D_1 \mathrm{e}^{\sqrt{-1}k}) = U_n \tag{18}$$

すなわち

$$U_{n+1} = (1 + 2D_1 - 2D_1 \cos k)^{-1} U_n. \tag{19}$$

3. (16) を行列とベクトルで書くが, $i = 0, 3$ に特別扱いが必要. $i = 0$ 側で, 境界条件 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) = 0$ を $f_{-1\,n} = f_{1\,n}$ として表現すると, $-D_1 f_{1\,n+1} + (1+2D_1) f_{0\,n+1} - D_1 f_{1\,n+1} = f_{0\,n}$ となる. 一方, $i = 3$ 側では, $-D_1 f_{2\,n+1} + (1+2D_1) f_{3\,n+1} - D_1 f_{4\,n+1} = f_{3\,n}$ だが, $f_{4\,n+1}$ はディリクレ条件から決まるので, 右辺に持っていく.

$$\begin{pmatrix} 1+2D_1 & \boxed{-2D_1} & 0 & 0 \\ -D_1 & 1+2D_1 & -D_1 & 0 \\ 0 & -D_1 & 1+2D_1 & -D_1 \\ 0 & 0 & -D_1 & 1+2D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{0\,n+1} \\ f_{1\,n+1} \\ f_{2\,n+1} \\ f_{3\,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{0\,n} \\ f_{1\,n} \\ f_{2\,n} \\ f_{3\,n} + \boxed{D_1 f_{4\,n+1}} \end{pmatrix} \tag{20}$$

5

1. 弦の振動. $f(x,t)$ は, 位置 x, 時刻 t でのまっすぐな位置からのずれ. 定数 v は弦を伝わる波の速さ (弦の密度と張力から定まる). $f(0,t) = 0$ は, $x = 0$ 側で弦がずれないように固定されていることを示す. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) = 0$ は, $x = 0$ 側で弦が外力を受けないことを示す. f を水波の高さなどとしてもよい.

2. 熱の伝導. $f(x,t)$ は, 位置 x, 時刻 t での温度. 定数 D は熱の広がりやすさ (熱伝導度と比熱から定まる). $f(0,t) = 0$ は, $x = 0$ 側で温度が 0 に保たれていることを示す. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) = 0$ は, $x = 0$ 側で熱が出入りしないことを示す. f を砂糖濃度などとしてもよい.