計算科学☆実習 B プチテスト (筆記)

樋口さぶろお [1] 配布: 2016-05-30 Mon 更新: Time-stamp: "2016-06-27 Mon 07:03 JST hig"

プチテスト (筆記) 参加案内

1. 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

過程不要

時刻 t, 座標 x とも整数値をとるランダムウォークを考える. 時刻 $t=3$ には $x=5$ に位置し, それ以降の各時刻に

- 確率 $\frac{3}{17}$ で x から $x-2$ に移動,
- 確率 $\frac{5}{17}$ で x から $x+1$ に移動,
- 確率 $\frac{9}{17}$ で x にとどまる.

時刻 t に座標 x にウォーカーがいる確率 $p(x,t)$ の漸化式と初期条件を求めよう.

2

過程不要

状態空間 $\{x\}=\{1,2,3,4\}$ 上のランダムウォークの座標 $X(t)$ が, 次の漸化式と初期条件で定まる.

$$\begin{aligned} X(t+1) =& X(t)+R(t+1), \quad (t=0,1,2,\ldots) \\ X(0) =& 2 \end{aligned}$$

ここで, $R(t)$ $(t=0,1,2,\ldots)$ は独立同分布

$$P(R(t)=r)=\begin{cases} \frac{1}{7} & (r=-1) \\ \frac{4}{7} & (r=0) \\ \frac{2}{7} & (r=+1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

にしたがう確率変数である.

ただし, 状態空間の両端がつながった周期的境界条件で考える. つまり, $x=4+1$ は $x=1$ と同じ状態, $x=1-1$ は $x=4$ と同じ状態と考える. これをマルコフ連鎖として考えたとき,

[1]Copyright © 2016 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.
hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502

1. (授業で定義した) 推移確率行列 M を書こう.
2. 推移図を書こう.

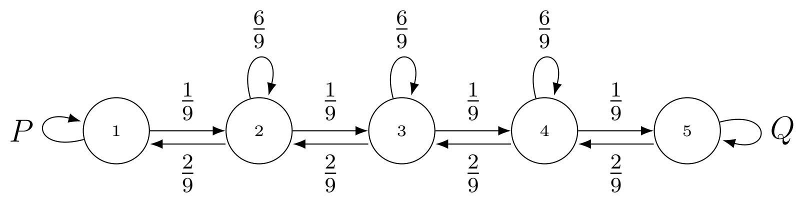
3

状態空間 $\{1,2\}$ 上のマルコフ連鎖を考える. 推移確率行列 $M=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2&6\\7&3\end{pmatrix}$, 初期分布を $\vec{p}(0)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ とする.

1. 極限分布 $\lim_{t\to+\infty}\vec{p}(t)$ を求めよう.
2. $\vec{p}(1)$ を求めよう.

4

次の推移図をもつ, 状態空間 $S=\{1,2,3,4,5\}$ のマルコフ連鎖を考える.



1. 推移図中の確率 P を求めよう.
2. 初期条件が, $t=0$ に $x=3$ である確率が 1, であるとき, $t=2$ に $x=3$ である確率を求めよう.
3. 初期条件が, $t=0$ に $x=5$ である確率が 1, であるとき, $t=2$ に $x=5$ である確率を求めよう. 答に Q をふくんでよい.

5

過程不要

1. ベクトル $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ は確率ベクトルか. 理由をつけて答えよう.
2. 行列 $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&3&1\end{pmatrix}$ は (この授業の定義での) 確率行列か. 理由をつけて答えよう.

6

$X(t+1)=X(t)+R(t+1), X(0)=0$ で定まるランダムウォークの座標を考える. ただし, $R(1),R(2),\ldots$ は独立同分布

- 確率 $1/5$ で値 $R=0$
- 確率 $4/5$ で値 $R=-1$

にしたがう確率変数である.

1. $X(2500)$ の母平均値と母分散を求めよう.
2. $X(2500) > -1980$ となる確率を近似的に求めよう.
3. $X(2500) = -3$ となる確率を求めよう (約分したり整理したりしなくてよい)

7

仕組みのよくわからないランダムウォークで $X(3)$ の次の標本が得られた.

$$3, 3, 3, 1, 1, 1, 1, -1, -3$$

1. 母期待値 $\mathrm{E}[X(3)^3]$ を推定しよう.
2. 母分散 $\mathrm{V}[X(3)]$ を推定しよう.

8

過程不要

次のプログラムは, ランダムウォークの座標 $X(t)$ のサンプルを出力する. ただし, `int getrandom(double y)` は y によって $+1$ または -1 を返す.

1. 間違って, srand(seed) を A でなく B の位置においたとしたら, どのような出力が得られるか, 日本語で答えよう.
2. 間違って, srand(seed) を A でなく C の位置においたとしたら, どのような出力が得られるか, 日本語で答えよう.

ソースコード 1: パスの測定

```
#define _CRT_SECURE_NO_WARNINGS // おまじない
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

double getuniform();      /* 定義省略 */
int getrandom(double y); /*定義省略. 1または-1を返す*/

int main(){
  int t,tmax, n,nmax, seed, x;

  scanf("%d",&seed);
  scanf("%d",&tmax);
  scanf("%d",&nmax);
  printf("#d=%d\n#T=%d\n#N=%d\n", seed,tmax,nmax);

  srand(seed);            /******A******/
  for(n=0;n<nmax;n++){
    /*srand(seed);*/      /******B******/
    x=0;
    printf("%d,",x);
    for(t=0;t<tmax;t++){
      /*srand(seed);*/ /******C******/
      x=x+getrandom(getuniform());
      printf("%d,",x);
    }
```

```
    printf("\n");
  }
  return 0;
}
```

9

過程不要

次のプログラムは, ランダムウォークで, 母比率を推定するためのものである.

$0 \le t \le$ `tend` で, ランダムウォーカーが $x < 0$ をいちども訪れないとき 1, それ以外のとき 0 を返す関数 `int w(int path[], int tend)` の中身を書こう.

ソースコード 2: パスの測定

```
#define _CRT_SECURE_NO_WARNINGS // おまじない
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#define TMAX 100

double getuniform();      /* 下では定義省略  */
int getrandom(double y); /* 下では定義省略  */
int w(int path[],int tend);

int main(){
  int t,tmax,  n,nmax, x, seed;
  int path[TMAX];
  int count=0;
  double p;

  scanf("%d",&seed);
  scanf("%d",&tmax);
  scanf("%d",&nmax);
  printf("#d=%d\n#T=%d\n#N=%d\n",seed,tmax,nmax);

  srand(seed);
  for(n=0;n<nmax;n++){
    t=0;x=0;                          /* 初期条件 */
    path[t]=x;
    for(t=1;t<=tmax;t++){
      x=x+getrandom(getuniform());  /* 漸化式 */
      path[t]=x;
    }
    count+=w(path,tmax);  /****ここでwを使用****/
  }
  p=(double)count/nmax;
  printf("*p=%f\n",p);
  return 0;
}

/* path[0],path[1],..,path[tend] というパスに対して, wを求めて返す */
int w(int path[], int tend){
  /*********** ここの部分を答える ***********/
}
```

$\boxed{\text{正規分布の上側確率の表}}$

計算科学☆実習 B プチテスト (筆記) 略解

樋口さぶろお [2] 配布: 2016-05-30 Mon 更新: Time-stamp: "2016-06-27 Mon 07:03 JST hig"

これは, 一部の過程のみ記した略解です. プチテストで, 受講者はすべての過程を記す必要があります.

配点 1-3,5,7-9:各 10 点,4,6:各 15 点. 計 100 点.

1

$$p(x,t+1) = \frac{3}{17}\times p(x+2,t) + \frac{9}{17}\times p(x,t) + \frac{5}{17}\times p(x-1,t), \quad p(x,3) = \begin{cases} 1 & (x=5) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

配点 漸化式 7 点, 初期条件 3 点.

2

1. $$\begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & 0 & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$
2. 略

配点 1,2:各 5 点.

3

1. 固有値は $1, -\frac{4}{9}$, 対応する固有ベクトル (の 1 つ) は $\frac{1}{13}\left(\begin{smallmatrix}6\\7\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)$,. $1 > |-\frac{4}{9}|$ なので, $t \to +\infty$ では唯一の定常分布 $\frac{1}{13}\left(\begin{smallmatrix}6\\7\end{smallmatrix}\right)$ に収束する.
2. $$\vec{p}(1) = M\vec{p}(0) = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

配点 1:8 点,2:2 点.

---

[2]Copyright © 2016 Saburo HIGUCHI. All rights reserved.
hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

講評 $\vec{p}(t)$ を求めきってる人も多かったけど, もっと楽にできます. 遷移確率行列の固有値の絶対値が 1 の分布が 1 個しかないなら, それが極限であることが保証されてます.

4

1. $P = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$
2. $(\frac{6}{9})^2 + 2 \times \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{9}$.
3. $Q^2 + \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{9}$.

配点 1,2,3:各 5 点.

5

1. 成分の和は 1 だが, 非負でないので確率ベクトルでない.
2. 縦ベクトルの成分の和が 1 でなく確率ベクトルでないものがあるので確率行列でない.

配点 1,2:各 5 点.

6

1. $\mathrm{E}[R(t)] = 0 \cdot \frac{1}{5} + (-1) \cdot \frac{4}{5} = -\frac{4}{5}$. $\mathrm{V}[R(t)] = 0^2 \cdot \frac{1}{5} + (-1)^2 \cdot \frac{4}{5} - (-\frac{4}{5})^2 = \frac{4}{25}$. $\mathrm{E}[X(2500)] = 2500 \cdot \mathrm{E}[R(t)] = -2000$. $\mathrm{V}[X(2500)] = 2500 \cdot \mathrm{V}[R(t)] = 400 = 20^2$.
2. $X(2500)$ は独立同分布の確率変数 $R(1), \ldots, R(2500)$ の和なので, $Z = \frac{X(2500)-(-2000)}{20}$ は標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ に近似的に従う. $P(X(2500) > -1980) = P(Z > \frac{-1980-(-2000)}{20}) = P(Z > 1) = 1 - F(1) = 0.1587$.
3. 2 項定理より, $R = -1$ が 3 回, $R = 0$ が 2497 回だから,

$$\frac{2500!}{3!2497!} \left(\frac{1}{5}\right)^{2997} \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{2500 \cdot 2499 \cdot 2498 \cdot 4^3}{6 \cdot 5^{2500}}.$$

配点 1,2,3:各 5 点.

7

1. 標本期待値は $\frac{1}{9}(3^3 + \ldots + (-3)^3) = \frac{57}{9} = \frac{19}{3}$. よって母期待値を $\frac{19}{3}$ と推定する.
2. 標本平均値は $\frac{1}{9}(3 + \cdots + (-3)) = 1$. 不偏標本分散は $\frac{1}{9-1}((3-1)^2 + \cdots + (-3-1)^2) = \frac{32}{8} = 4$. よって母分散を 4 と推定する.

配点 1,2:各 5 点.

講評 母ナントカと, その推定値である標本ナントカが等しいかのような式を書いてはいけません.

8

1. nmax 個の同一な不規則な長さ tmax のパス (経路) が出力される.
2. nmax 個の同一なパス (経路) が出力される．各パスは, $0, 1, 2, \ldots, \mathtt{tmax}T$, または, $0, -1, -2, \ldots, -\mathtt{tmax}$ のどちらかである.

配点　1,2:各 5 点.

講評　出力はどうなるか, という問ですから, seed がなんとかとか, 乱数表のヘッダがなんとかとかにとどまる答では不十分です．また, $\mathtt{nmax}\times(\mathtt{tmax}+1)$ 個の数が出力されるのですから, (満点になると思って書いているわけではないでしょうが)「同じ数になる」では不十分です．どの数とどの数が同じなのか, B と C では「同じ」の範囲がどう違うのか, 日本語力を発揮して書きましょう.

9

```
int w(int path[], int tend){
  int t;
  for(t=0;t<=tend;t++){
    if(path[t]<0){
      return 0;
    }
  }
  return 1;
}
```

配点　10 点.