計算科学☆実習 B ファイナルトライアル (筆記)

樋口さぶろお[1] 配布: 2016-08-01 Mon 更新: Time-stamp: ”2016-08-01 Mon 09:50 JST hig”

ファイナルトライアル (筆記) 参加案内

1. 指定された用紙に解答しよう.
2. 過程も答えよう. 最終的な答えが正しいことがわかるような過程を記そう.
3. 問題文に現れない記号を使うときは, 定義を記そう.

1

過程不要

確率過程の数値計算では, 時刻を指定した座標 $x(t)$ や, 時刻と座標を指定した確率 $p(x,t)$ を使う. また, 母期待値そのものを直接に求めたり, 標本期待値を求めて母期待値を推定したりする.

以下の問について, 答を (A),(B) から選ぼう.

1. マルコフ連鎖の遷移確率行列の数値計算では, (まず) 求めるのはどちらか. (A) $x(t)$, (B) $p(x,t)$
2. 確率シミュレーション (授業後半でやった B 湖の水位や A 魚の漁獲量) で, (まず) 求めるのはどちらか. (A) $x(t)$, (B) $p(x,t)$
3. 偏微分方程式 (拡散方程式, 熱方程式)

   $$\frac{\partial u}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

   に現れる u は次のどちらに近いか. (A) $x(t)$, (B) $p(x,t)$
4. マルコフ連鎖の遷移確率行列の数値計算では, 次のどちらが得られるか. (A) 母期待値そのもの, (B) 母期待値の推定量である標本期待値.
5. 確率シミュレーション (授業後半でやった B 湖の水位や A 魚の漁獲量) では, 次のどちらが得られるか. (A) 母期待値そのもの, (B) 母期待値の推定量である標本期待値.

2

過程不要

次のうち, 正しいものいくつでも選ぼう.

1. 時系列データの移動平均をとると, 一般的には, 元のデータよりもなめらかなデータが得られる.

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502

2. あるデータの移動平均の時刻 t における値は, データの時刻 0 から t までの値の平均である.
3. 6 次の移動平均では, 時刻の前後 6 個ずつ, 計 13 個の時刻のデータの平均をとる.
4. 時系列データの自己相関係数 $r(k)$ に対して, $|r(k)| \leq 1$ が成立する.
5. 時系列データの自己相関係数 $r(k)$ に対して, $r(k) \geq 0$ が成立する.

3

過程不要

6 人のウォーカーが, 座標が整数値の点のみを移動するランダムウォークを考える. 座標は $0 \leq x \leq 10$ の整数に制限されている.

ある時刻に, ウォーカーが, $x = 1$ に 2 人, $x = 7$ に 1 人, $x = 8$ に 3 人いるとする.

1. オイラー表現を用いたとき, 配列 `P[]` のサイズは最低どれだけ必要か. 配列の各要素はどのような値をとるか (複数の可能性がある場合, ひとつ答えればいい).
2. ラグランジュ表現を用いたとき, 配列 `x[]` のサイズは最低どれだけ必要か. 配列の各要素はどのような値をとるか (複数の可能性がある場合, ひとつ答えればいい).

配列のサイズとは, 元の型の変数を何個集めたかという個数のことである. `int x[SIZE];` と宣言される `x` のサイズは `SIZE`.

4

次の確率密度関数を持つ連続的確率分布を考える.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{18}x^2 & (-3 \leq x < +3) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

1. $P(0 \leq X < 2)$ を求めよう.
2. $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.
3. $\phi(x) = |x|$ とするとき $\mathrm{E}[\phi(X)]$ を求めよう. ただし $|x|$ は x の絶対値.

5

実数値の座標が $X(t+1) = X(t) + R(t+1), X(0) = 0$ で定まるランダムウォークを考える. ただし, 連続型確率変数 $R(1), R(2), \ldots$ は独立同分布にしたがい, $\mathrm{E}[R(t)] = 2, \mathrm{V}[R(t)] = 3$ である.

1. $X(1200)$ の母平均値を求めよう
2. $X(1200)$ の母標準偏差を求めよう.
3. $T = 1200$ が十分に大きいと考えて中心極限定理を利用し, $X(1200) > 2490$ となる確率を近似的に求めよう.

6

ある関数 $\phi(x)$ の定積分

$$I = \int_5^8 \phi(x)\ \mathrm{d}x$$

の値をモンテカルロ数値積分で推定することを考える. $[5, 8)$ 一様分布にしたがう連続型確率変数 X の乱数を発生させて, $Y = \phi(X)$ の標本サイズ $N = 100$ の標本を得たところ, Y の標本平均値は 36.0, Y の不偏標本分散は 4.0 だった.

以下, いずれも根号をはずしたり実数の四則演算で整理したりしなくてよい.

1. I の値を, 信頼係数 0.95 で区間推定しよう.
2. 信頼区間は上の通りだったが, その長さを, 上の求めたものの $1/9$ 倍にしたい. それには標本サイズをいくつにすればよさそうか答えよう (ペーパーテストの予定調和的な答として 余裕をもたないぴったりの値で).
3. 次のうち, 大きくなると信頼区間が長く (大きく) なるものをすべて選ぼう (理由不要). (A) 信頼係数 (B) 標本サイズ (C) Y の標本平均値 (D) Y の不偏標本分散 (E)$|\phi(x)|$ の最大値

7

ある氷製造マシンは, 一辺の長さが Q の立方体の氷を製造する. Q は確率密度関数

$$f_{\mathrm{Q}}(q) = \begin{cases} \frac{1}{6} & (10 \leq q < 16) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

にしたがう連続型確率変数である.

立方体の氷の体積 $R = g(Q) = Q^3$ もまた, 連続型確率変数である.

$16^2 = 256, 16^3 = 4096, 16^4 = 65536$ だが, 整数の四則演算やべき乗や分数は計算や約分や簡単化をせずにそのまま残してもよい.

1. 確率変数 R の確率密度関数を $f_{\mathrm{R}}(r)$ を求めよう.
2. 体積 R の母期待値を求めよう.
3. 体積 R が 2000 未満である確率を求めよう.

8

次の確率密度関数 $f(r)$ に従う連続型確率変数 R の乱数を逆関数法で生成したい.

$$f(r) = \begin{cases} \frac{1}{18} r & (0 \leq r < 6) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

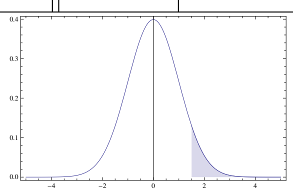
関数 `double getrandom(double y)` で return する $g(y)$ を求めよう.

すなわち, Y が $[0, 1)$ 一様分布にしたがう連続型確率変数であるときに, $R = g(Y)$ が $f(r)$ にしたがうように $g(y)$ を定めよう.

標準正規確率表 (上側確率$=Q(z) = 1 - F(z)$)

$Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$. $P(Z > z) = 1 - F(z) = Q(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{z'^2}{2}}\, \mathrm{d}z'$ の表.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010



計算科学☆実習 B ファイナルトライアル (筆記) 略解

樋口さぶろお[2] 配布: 2016-08-01 Mon 更新: Time-stamp: ”2016-08-01 Mon 09:50 JST hig”

これは, 一部の過程のみ記した略解です. プチテストで, 受講者はすべての過程を記す必要があります.

配点

1

1. (B)
2. (A)
3. (B)
4. (A)
5. (B)

2

1,4

3

1. $0 \leq x \leq 10$ よりサイズは 11. `int P[]={0,2,0,0,0,0,0,1,3,0,0};`
2. 6 人よりサイズは 6. `int x[]={1,1,7,8,8,8};`

4

1. $\int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{4}{27}$.
2. $f(x)$ は偶関数であることに注意すると, $\mathrm{E}[X] = 0$. $\mathrm{E}[X^2] = 2\int_0^3 x^2 \frac{1}{18} x^2\ \mathrm{d}x = \frac{27}{5}$. よって, $\mathrm{V}[X] = \frac{27}{5} - 0^2 = \frac{27}{5}$.
3. $\phi(x) \times f(x)$ は偶関数であることに注意すると, $\mathrm{E}[\phi(X)] = 2 \cdot \int_0^3 x \cdot \frac{1}{18} x^2\ \mathrm{d}x = \frac{9}{4}$.

5

1. $\mathrm{E}[X(1200)] = 1200 \cdot \mathrm{E}[R] = 2400$.
2. $\mathrm{V}[X(1200)] = 1200 \cdot \mathrm{V}[R] = 3600 = 60^2$. よって, $\sqrt{\mathrm{V}[X(1200)]} = 60$.
3. 中心極限定理から, $Z = \frac{X(1200)-2400}{60}$ は近似的に標準正規分布 $\mathrm{N}(0, 1^2)$ にしたがう. よって, $P(X(1200) > 2490) = P(Z > 1.5) = 0.0668$.

---

hig@math.ryukoku.ac.jp, http://hig3.net(講義のページもここからたどれます), へや:1 号館 5 階 502.

6

1. $(8-5)\times(36-1.96\times\sqrt{4/100}) < I < (8-5)\times(36+1.96\times\sqrt{4/100})$.
2. 信頼区間の長さは 標本サイズの $1/2$ 乗に反比例するので, $N' = 100/(1/9)^2 = 8100$ ととればよい.
3. (A),(D)

7

1. $f_{\mathrm{Q}}\mathrm{d}q = f_{\mathrm{R}}\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}r = 3q^2\mathrm{d}q$ より,

$$
\begin{aligned}
f_{\mathrm{R}} =& \frac{1}{3q^2} f_{\mathrm{Q}}(q) \\
=& \tfrac{1}{3(r^{1/3})^2} \begin{cases} \frac{1}{6} & (10 \le r^{1/3} < 16) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases} \\
=& \begin{cases} \frac{1}{18r^{2/3}} & (10^3 \le r < 16^3) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

2. $\mathrm{E}[Q^3] = \int_{10}^{16} \frac{1}{6} q^3 \, \mathrm{d}q = \frac{16^4 - 10^4}{24} = 2314$.
3. $P(R < 2000) = P(Q < 2000^{1/3}) = \int_{10}^{2000^{1/3}} \frac{1}{6} \mathrm{d}q = \frac{10}{6}(2^{1/3} - 1)$.

8

$0 \le r < 6$ で考える.
累積分布関数 $F(r)$ は,

$$
F(r) = \int_0^r \frac{1}{18} r' \, \mathrm{d}r' = \frac{1}{9} r^2.
$$

$y = F(r)$ を解いて, $r = g(y) = 3\sqrt{y}$.