離散座標ランダムウォークの座標の確率・母平均値・母分散

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B L02(2016-04-18 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2016-04-24 Sun 08:05 JST hig"

今日の目標

- ランダムウォークの用語を読める, 使える
- 3 つの方法でランダムウォークの座標の確率・母期待値・母分散が計算できる

http://hig3.net

L01-Q1
Quiz 解答:擬似乱数の使いかた

ソースコード 1: 乱数

```
double getrandom(double y){
  if(y<0.3){
    return 0.4;
  }
  return 0.6;
}
```

L01-Q4
Quiz 解答:擬似乱数の使いかた

ソースコード 2: 乱数

```
int getrandom(double y){
  if( y<1.0/3.0 ){
    return -1;
  } else if( y<1.0/3.0+1.0/2.0 ){
    return 0;
  } else {
    return +1;
  }
}
```

ここまで来たよ

3 ランダムウォークと離散型擬似乱数

4 離散座標ランダムウォークの座標の確率・母平均値・母分散
- ランダムウォーク
- 方法 1:手計算
- 方法 2: 独立性を使って母平均値と母分散 (T 任意) を計算
- 方法 3: 中心極限定理で近似 (T が大きいとき)

ランダムウォーク

ランダムウォークの定義

$R(t)$: 独立同分布に従う離散型確率変数. $t = 1, 2, 3, \ldots$
$X(t)$: 次で決まる確率変数. $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned} X(0) &= x_0 \\ X(t+1) &= X(t) + R(t+1) \end{aligned}$$

今日の授業ではベルヌーイ分布

$$P(R(t) = r) = \begin{cases} p = \frac{2}{3} & (r = 1) \\ 1 - p = \frac{1}{3} & (r = 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

絵で言うと

こんなこと考えます

座標 $X(t)$ について, 以下の母ナントカを求めよう.
(次回以降) 標本から推定しよう.

- $\mathrm{E}[X(2)]$, $\mathrm{E}[\mathrm{e}^{X(2)}]$, $X(2) > 1$ となる確率
- $\mathrm{E}[X(1002)]$, $\mathrm{E}[\mathrm{e}^{X(1002)}]$, $X(1002) > 51$ となる確率
- $X(50) = 12$ かつ $X(100) = 25$ となる確率

$X(t)$ を標本抽出

$$P(R(t)=r)=\begin{cases} p=\frac{2}{3} & (r=1) \quad \text{サイコロで} \boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6} \\ 1-p=\frac{1}{3} & (r=0) \quad \text{サイコロで} \boxed{1}\boxed{2} \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

$X(t+1)=X(t)+R(t+1) \Leftrightarrow X(T)=X(0)+\sum_{t=1}^{T} R(t)$.
$X(0)=x_0=0$ とする

t	0	**1**	2	3	**4**	5	6	7	8	**9**

記入欄

$R(t)$	$\times$									
$X(t)$	0									

グラフ (横軸 t, 縦軸 x) `https://manaba.ryukoku.ac.jp` に送信.

ここまで来たよ

3 ランダムウォークと離散型擬似乱数

4 離散座標ランダムウォークの座標の確率・母平均値・母分散

- ランダムウォーク
- 方法 1:手計算
- 方法 2: 独立性を使って母平均値と母分散 (T 任意) を計算
- 方法 3: 中心極限定理で近似 (T が大きいとき)

方法 1: 確率の法則で手計算 (T が小さいとき)

$X(1) = R(1)$ の母分布

$X(1)$	確率
0	$q = 1 - p = \frac{1}{3}$
1	$p = \frac{2}{3}$

$X(2) = R(1) + R(2)$ の母分布

$X(2)$	確率	
0	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$	$0 + 0$
1	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$	$0 + 1$ or $1 + 0$
2	$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$	$1 + 1$

L02-Q1　　$p = 2/3$ とする.

Quiz(ランダムウォークの確率と座標の期待値)

離散ランダムウォークで, $X(0) = x_0 = 0$, $X(t+1) = X(t) + R(t+1)$,

$$P(R(t) = r) = \begin{cases} p & (r = 1) \\ 1 - p & (r = 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

のとき,

1. $P(X(3) = x)$ を求めよう ($x = 0, 1, \ldots$ は整数).
2. $\mathrm{E}[X(3)]$ を求めよう.
3. $\mathrm{V}[X(3)]$ を求めよう.
4. $X(3) > 1$ となる確率を求めよう.

方法 1':組み合わせの場合の数 ${}_T\mathrm{C}_x$ を使うと?

T 個から x 個を選ぶ場合の数

$$ {}_T\mathrm{C}_x = \binom{T}{x} $$

$\leadsto$

$$ \boxed{\phantom{P(X(T)=x)=\binom{T}{x}p^x(1-p)^{T-x}}} $$

$$ P(X(T) = x) = \binom{T}{x} p^x (1-p)^{T-x} \qquad (0 \leq x \leq T) $$

ここまで来たよ

3 ランダムウォークと離散型擬似乱数

4 離散座標ランダムウォークの座標の確率・母平均値・母分散

- ランダムウォーク
- 方法 1:手計算
- 方法 2: 独立性を使って母平均値と母分散 (T 任意) を計算
- 方法 3: 中心極限定理で近似 (T が大きいとき)

方法 2: 独立性を使って母平均値と母分散 (T 任意)

独立同分布 $R(t)$ の, 母平均値を $\mathrm{E}[R(t)] = \mu_R$. 母分散を $\mathrm{V}[R(t)] = \sigma_R^2$ とする.

確率変数の和の母期待値と母分散

つねに $\mathrm{E}[X+Y] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y]$.
X, Y が独立のとき $\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$.
X, Y が独立のとき $\mathrm{V}[X+Y] = \mathrm{V}[X] + \mathrm{V}[Y]$. 確率統計☆演習 I(2015)L09

$X = R(1), Y = R(2)$ と思うと

$$\mathrm{E}[X(T)] = \mathrm{E}\left[x_0 + \sum_{t=1}^{T} R(t)\right] = x_0 + \sum_{t=1}^{T} \mathrm{E}[R(t)] = x_0 + T \cdot \mu_R.$$

直観的解釈:

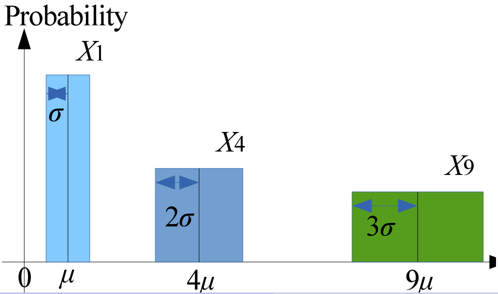
$$\mathrm{V}[X(T)] = \mathrm{V}\left[x_0 + \sum_{t=1}^{T} R(t)\right] = 0 + \sum_{t=1}^{T} \mathrm{V}[R(t)] = T \cdot \sigma_R^2$$

直観的解釈: $\boxed{}$

$X(t)$ の母標準偏差

$\sqrt{\mathrm{V}[X(T)]} = \boxed{}$

ってことは, 確率分布の時間変化はこんな感じ?



L02-Q2

Quiz(離散的なランダムウォークの確率・平均値・分散・標準偏差)

ランダムウォークを表す次の数列を考える.

$$X(t+1) = X(t) + R(t+1), \qquad X(0) = 0.$$

ただし, $R(t+1)$ は独立同分布に従い, 確率 p で $R = -3$, 確率 $1-p$ で $R = +1$ の値をとる ($0 < p < 1$). 次のうち正しいものの記号をすべて答えよう.

1. $X(t)$ は t に比例する.
2. $X(t)$ の母平均値は t に比例する.
3. $X(t)$ の母分散は t に比例する.
4. $\mathrm{e}^{X(t)}$ の母期待値は t に比例する.
5. $X(t)$ の母標準偏差は t に比例する.

L02-Q3

Quiz(ランダムウォークの到達点の座標の母平均値・母分散)

確率変数 $R(t)$ $(t = 1, 2, \ldots)$ は,

- 確率 $q = 1 - p$ で $R(t) = 0$
- 確率 p で $R(t) = 1$

の値をとる (Bernoulli 分布). $t \neq t'$ のとき $R(t)$ と $R(t')$ は独立.
時刻 t におけるランダムウォーカーの座標を, 次の漸化式で定める
$(t = 0, 1, 2, \ldots)$.

$$X(t+1) = X(t) + R(t+1), \quad X(0) = 0.$$

1. $R(t)$ の母平均値を求めよう.
2. $R(t)$ の母分散を求めよう.
3. $R(t)$ の母標準偏差を求めよう.
4. $X(t)$ の母平均値を求めよう.
5. $X(t)$ の母分散を求めよう.
6. $X(t)$ の母標準偏差を求めよう.

ここまで来たよ

3 ランダムウォークと離散型擬似乱数

4 離散座標ランダムウォークの座標の確率・母平均値・母分散

- ランダムウォーク
- 方法 1:手計算
- 方法 2: 独立性を使って母平均値と母分散 (T 任意) を計算
- 方法 3: 中心極限定理で近似 (T が大きいとき)

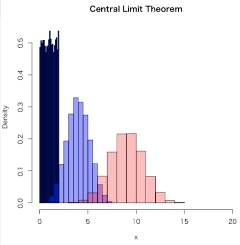
方法 3: 独立同分布を利用して中心極限定理で近似 (T が大きいとき)

中心極限定理 (いいかげんバージョン)

$R_1, \ldots, R_T$ が母平均値 μ, 母分散 σ^2 の独立同分布に従うとき,

- $X_T = R_1 + \cdots + R_T$, の確率分布は, $T \to +\infty$ で, 正規分布 $\mathrm{N}(T \cdot \mu, T \cdot \sigma^2)$ に似る

確率統計☆演習 I(2015)L09



$\rightsquigarrow$

ランダムウォークの座標 $X(T)$ の確率分布は, T が大きいとき, 母平均値 $x_0 + T \cdot \mu_R$, 母分散 $T \cdot \sigma_R^2$ の正規分布にほぼ従う.

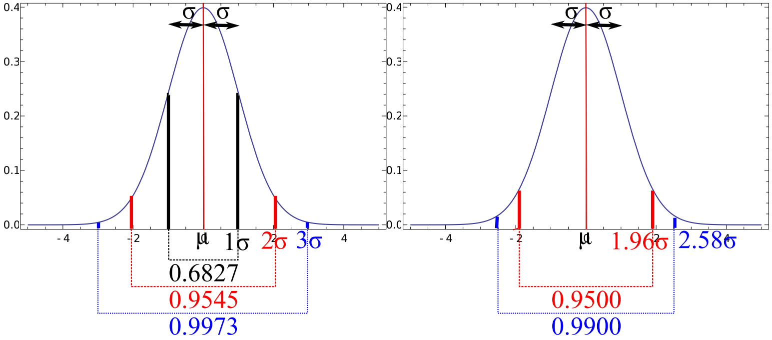
L02-Q4

Quiz(ランダムウォークと中心極限定理)

$X(t+1) = X(t) + R(t+1), X(0) = 0$ で定まるランダムウォークの座標を考える. ただし, $R(1), R(2), \ldots$ は確率変数で, 母平均値 $\mathrm{E}[R(t)] = -\frac{1}{4}$, 母分散 $\mathrm{V}[R(t)] = \frac{1}{5}$ の独立同分布に従う.

1. $X(20)$ の母平均値と母分散を求めよう.
2. $X(20) > -1$ となる確率を (近似的でよいので紙と鉛筆で) 求めよう.
3. $|X(20)| > 1$ となる確率を (近似的でよいので紙と鉛筆で) 求めよう.

正規分布 (ガウス分布) のグラフに関係した面積



標準正規確率表 (上側確率 $Q(z)$)

$\mathrm{N}(0,1^2)$ で, $Z \geq z$ となる確率 $= Q(z) = 1 - F(z) = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}(z/\sqrt{2})$. F:累積分布関数.

紙と鉛筆では計算できない. 表またはソフトウェアに頼る.

科目の 1 週間のタイムライン (修正)

1. 月昼 樋口オフィスアワー (1-502)
2. 月 15:20 予習復習問題 (e ラーニング) 解答~~1 回のみ~~ 解答何回でも. 最終解答で採点.
3. 月 4 講義 (7-002), quiz(参照あり)
4. このころ実習のタスク公開 目を通して考えておくこと推奨
5. 火 23:55 先週の課題の一部の提出締切
6. ~~水 13:35 予習復習問題 (e ラーニング) 解答何回でも~~
7. 水 3 実習 (1-609), quiz 返却
8. 水 23:55 今週の課題の一部の提出締切

実習室に行ったら, `http://hig3.net`→ 計算科学☆実習 B へ.

お知らせ

- 予習復習問題始まってます 次回は 2016-04-25 月 15:20 締切
- 実習課題 p012 は 2016-04-19 火 23:55 締切
- 実習課題 p02? に目を通しておこう
- 2016-05-11 水 3 実習の春のプチテスト

`https://manaba.ryukoku.ac.jp`
マイページの下の方に manaba 出席カード
提出