ランダムウォークの確率と漸化式と初期条件

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B L04(2016-05-02 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2016-05-02 Mon 20:32 JST hig"

今日の目標

- ランダムウォークのルールから $p(x,t)$ の初期条件と漸化式が書ける.
- 初期条件と漸化式から $p(x,t)$ を計算できる.

http://hig3.net

L03-Q1
Quiz 解答:ランダムウォーカーの到達点の座標の母平均・母分散

1. 標本平均値 $\overline{X(3)} = \frac{1}{10}(3+3+\cdots+(-3)) = 1$. よって, 母平均値 $\mathrm{E}[X(3)]$ は 1 と推定できる.
2. 標本分散 $S^2 = \frac{1}{10-1}((3-1)^2+\cdots+(-3-1)^2) = \frac{32}{9}$. よって母分散 $\mathrm{E}[X(3)]$ は $\frac{32}{9}$ と推定できる.
3. 標本期待値 $\overline{X(3)^3} = \frac{1}{10}(3^3+\cdots+(-3)^3) = \frac{29}{5}$. よって母期待値 $\mathrm{E}[X(3)^3]$ は $\frac{29}{5}$ と推定できる.
4. 標本期待値 $\overline{\mathbf{1}_{[X>1]}(X(3))} = \frac{1}{10}(1+1+1+0+\cdots+0) = \frac{3}{10}$. よって母比率 $p = \mathrm{E}[\mathbf{1}_{[X>1]}(X(3))]$ は $\frac{3}{10}$ と推定できる.

L03-Q2

x=0, sum1+=x*x*x の位置に注意
初期条件から, 長方形に並んだ数の, 左端の列 (t=0)ってぜんぶ 0 だよね.
標本期待値 $\frac{1}{N}\sum_n \phi(X(T)^{(n)})$ って, 長方形に並んだ数の, 右端の列 (t=T) だけから計算されるよね.

ここまで来たよ

方法 1':確率や期待値を手計算する

ランダムウォーカーの時刻 t の座標 $X(t)$ は漸化式

$$X(t+1) = X(t) + R(t+1), \quad X(a) = b.$$

に従う. $R(t)$ $(t = 1, 2, \ldots, T)$ は独立同分布に従う確率変数.

$p(x,t)$ の定義

時刻 t に, ウォーカーが x にいる確率 $p(x,t) = P(X(t) = x)$.

性質 $\forall t \quad \sum_{x=-\infty}^{+\infty} p(x,t) = 0$

$p(x,t)$ の漸化式

具体例で

「ランダムウォーカーが時刻 t に x にいるとき, 時刻 $t+1$ には, 確率 p で $x+1$ に, 確率 q で $x-1$ に移動する」

$\Downarrow$

$X(t+1) = X(t) + R(t+1)$

R	確率
-1	$q = 1 - p$
$+1$	p

確率微分方程式的描像, ランジュバン方程式的描像

$X(t)$ の漸化式から $p(x,t)$ の漸化式を導きたい.
確率 (合計 1) だけど, x 軸上に合計 $N = 1000$ 人いるかのように考えよう.
時刻 t に x にいる $N \times p(x,t)$ 人のうち, 時刻 $t+1$ には, 平均的には

- $N \times p(x,t) \times p$ 人が $x+1$ に
- $N \times p(x,t) \times q$ 人が $x-1$ に

去るはず.

逆に考えると, 時刻 $t+1$ に,

- $x-1$ から 人が x に
- $x+1$ から 人が x に

やってくるはず.
これが, $t+1$ に x にいる人すべて $N \times p(x,t+1)$.

両辺のどこにも, 確率変数はなくなった!(確率はあるけど)

拡散方程式的描像, マスター方程式的描像, フォッカープランク方程式的描像

L04-Q1

Quiz(離散的なランダムウォークの確率の漸化式)

時間 t, 座標 x が整数値のみをとるようなランダムウォークを考える.
時刻 $t=5$ に $x=2$ を出発し, 各時刻 t に,

確率 $\frac{1}{7}$ で $+2$ だけ移動
確率 $\frac{4}{7}$ で -1 だけ移動
確率 $\frac{2}{7}$ で 0 だけ移動 (移動しない)

する.
時刻 t にランダムウォーカーが座標 x にいる確率 $p(x,t)$ の漸化式と初期条件を求めよう.

L04-Q2

Quiz(離散的なランダムウォークの確率の漸化式)

時間 t, 座標 x が整数値のみをとるようなランダムウォークを考える.
時刻 $t = 3$ に $x = 2$ を出発し, 各時刻 t に,

確率 $\frac{1}{8}$ で x から $x+1$ に移動
確率 $\frac{3}{8}$ で x から $x-2$ に移動
確率 $\frac{4}{8}$ で x にとどまる

ものとする.
時刻 t にランダムウォーカーが座標 x にいる確率 $p(x,t)$ の (t に関する) 漸化式と初期条件を求めよう.

ここまで来たよ

3. ランダムウォークの座標の標本抽出と推定

4. ランダムウォークの確率と漸化式と初期条件
   - $p(x,t)$ の漸化式
   - $p(x,t)$ の初期条件
   - 初期値・漸化式の適用

$p(x,t)$ の初期条件

具体例で

「ランダムウォーカーが時刻 $t=2$ に $x=3$ から出発した」

$\Downarrow$

$X(t)$ の初期条件から $p(x,t)$ の初期条件を導きたい.

例 1

$t=2$ には $x=3$ にいる →

$X(2)$	確率
$\vdots$	0
2	0
3	1
4	0
$\vdots$	0

$\to p(x,2)=$

例 2

$t=1$ には $x=0,10$ に各 $\frac{1}{2}$ の確率でいる →

$X(1)$	確率
$\vdots$	0
0	$\frac{1}{2}$
$\vdots$	0
10	$\frac{1}{2}$
$\vdots$	0

$\to p(x,1)=$

ここまで来たよ

3 ランダムウォークの座標の標本抽出と推定

4 ランダムウォークの確率と漸化式と初期条件

- $p(x,t)$ の漸化式
- $p(x,t)$ の初期条件
- 初期値・漸化式の適用

$t \backslash x$	$\cdots$	0	$\cdots$	$x-1$	x	$x+1$	$\cdots$
$\vdots$			$\cdots$				$\cdots$
t				$p(x-1,t)$	$p(x,t)$	$p(x+1,t)$	
$t+1$				$p(x-1,t+1)$	$p(x,t+1)$	$p(x+1,t+1)$	
$\vdots$							

$p(x,t)$ の漸化式を適用してみよう

$p(x,t+1) = \frac{2}{3}p(x-1,t) + \frac{1}{3}p(x+1,t)$, $p(0,0) = 1, p(x,1) = 0(x \neq 0)$.

$t \backslash x$	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$	x	$\cdots$
0	$\cdots$	0	0	0	1	0	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$
1									$\cdots$		$\cdots$
2									$\cdots$		$\cdots$
3									$\cdots$		$\cdots$
$\vdots$											
t										$p(x,t)$	
$\vdots$											

L04-Q3

Quiz(2 項係数の漸化式)

次のランダムウォークの確率の漸化式を考える.

$$p(x,t+1)=\begin{cases}\frac{1}{5}p(x-1,t)+\frac{4}{5}p(x+1,t) & (\text{それ以外})\\ 0 & (x<-1, x>6)\end{cases},$$

$$p(x,0)=\begin{cases}0.5 & (x=1,3)\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

下のような $p(x,t)$ の表を, 漸化式を適用して埋めよう.

$t\backslash x$	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$	$+6$	$+7$
0										
1										
2										

L04-Q4

Quiz(2 項係数の漸化式)

2 項係数 ${}_t\mathrm{C}_x$ を考える.
2 項係数は漸化式

$$ {}_{t+1}\mathrm{C}_x = {}_t\mathrm{C}_{x-1} + {}_t\mathrm{C}_x $$

を満たす ($t = 0, 1, 2, \cdots$, x は整数).
また, 次が成立する.

$$ {}_0\mathrm{C}_x = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases} $$

1. 上の漸化式と初期条件だけを使って, 縦に $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, 横に $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ の表に 2 項係数 ${}_t\mathrm{C}_x$ をうめよう.
2. ${}_t\mathrm{C}_x$ の場合の数としての意味から, 漸化式が成立することを直観的に説明しよう.

お知らせ

- 2016-05-11 水 3 実習の春のプチテスト
  - プチテスト出題計画を確定. 実施案内も参照. 当日はサンプルプログラムはないかもしれません.
    - ★ rand2 の変奏 指定された確率変数に対応する int getrandom(double) を書く
    - ★ est2 の変奏 与えられたデータから Excel で, 母平均値, 母分散, 母標準偏差, 母期待値, 母比率などを推定する
    - ★ rw19 の変奏 与えられた初期条件と確率変数 $R(t)$ の, ランダムウォークの座標 $X(t)$ の標本を抽出する
- 統計検定 団体受検 2016-06-19 日, 申込締切 2016-05-09 月

`http://www.math.ryukoku.ac.jp/toukei-kentei/`

`https://manaba.ryukoku.ac.jp`
マイページの下の方に manaba 出席カード提出