マルコフ連鎖

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B　L05(2016-05-09 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2016-05-08 Sun 19:05 JST hig"

今日の目標

- マルコフ連鎖の定義が説明できる
- 現象の定義からマルコフ連鎖の遷移行列を書ける
- マルコフ連鎖の定常状態, $p(x,t)$ を求められる

http://hig3.net

L05-Q1
Quiz 解答:離散的なランダムウォークの確率の漸化式

$$
\begin{aligned}
p(x,t+1) =& \frac{1}{7}\times p(x-2,t)+\frac{2}{7}\times p(x,t)+\frac{4}{7}\times p(x+1,t),\\
p(x,5) =& \begin{cases} 1 & (x=2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

L05-Q2
Quiz 解答:離散的なランダムウォークの確率の漸化式

$$
\begin{aligned}
p(x,t+1) =& \frac{1}{8}\times p(x-1,t)+\frac{4}{8}\times p(x,t)+\frac{3}{8}\times p(x+2,t),\\
p(x,3) =& \begin{cases} 1 & (x=2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

L05-Q3

Quiz 解答:2 項係数の漸化式

$t \backslash x$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0.5	0	0.5	0	0	0	0
1	0	0	0.4	0	0.5	0	0.1	0	0	0
2	0	0.32	0	0.48	0	0.18	0	0.02	0	0

ここまで来たよ

3. ランダムウォークの確率と漸化式と初期条件

4. マルコフ連鎖
   - (復習)$p(x,t)$ の漸化式
   - 確率ベクトル, 確率行列
   - 定常分布, 分布の時間発展

方法 1':確率や期待値を手計算する

ランダムウォーカーの時刻 t の座標 $X(t)$ は漸化式

$$X(t+1) = X(t) + R(t+1), \quad X(a) = b.$$

に従う. $R(t)$ $(t = 1, 2, \ldots, T)$ は独立同分布に従う確率変数.

$p(x,t)$ の定義

時刻 t に, ウォーカーが x にいる確率 $p(x,t) = P(X(t) = x)$.

性質 $\forall t \quad \sum_{x=-\infty}^{+\infty} p(x,t) = 0$

$p(x,t)$ の漸化式

具体例で

「ランダムウォーカーが時刻 t に x にいるとき, 時刻 $t+1$ には, 確率 p で $x+1$ に, 確率 q で $x-1$ に移動, 確率 $1-p-q$ でその場にとどまる.

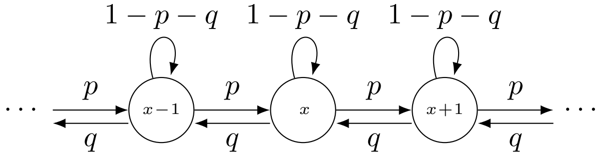
$\Downarrow$

$X(t+1) = X(t) + R(t+1)$

R	確率
-1	q
0	$1-p-q$
$+1$	p

$p(x,t+1) = p \cdot p(x-1,t) + (1-p-q) \cdot p(x,t) + q \cdot p(x+1,t).$

推移図 推移=transition



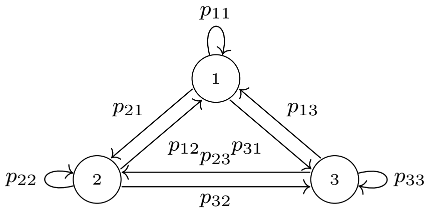
ここまで来たよ

3. ランダムウォークの確率と漸化式と初期条件

4. マルコフ連鎖
   - (復習)$p(x,t)$ の漸化式
   - 確率ベクトル, 確率行列
   - 定常分布, 分布の時間発展

両端のつながった $x = 1, 2, 3$ のランダムウォーク I

空間の移動でなく,
ウォーカー:猫 1:食べる 2:寝る 3:遊ぶ のような状態遷移と思ってもよい.
$S = \{1, 2, 3\}$ 状態空間



推移確率

$$p_{先\ 元}, p_{xy} = P(X(t+1) = x | X(t) = y) \cdots \text{条件付き確率}$$

確率統計☆演習 II(2016)L01

世の中では p_{yx} と書くことが多い.

$p(x,t)$ の漸化式

$$\begin{aligned} p(1,t+1) =& p_{11}p(1,t) + p_{12}p(2,t) + p_{13}p(3,t) \\ p(2,t+1) =& p_{21}p(1,t) + p_{22}p(2,t) + p_{23}p(3,t) \\ p(3,t+1) =& p_{31}p(1,t) + p_{32}p(2,t) + p_{33}p(3,t) \end{aligned}$$

または

$$\begin{pmatrix} p(1,t+1) \\ p(2,t+1) \\ p(3,t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(1,t) \\ p(2,t) \\ p(3,t) \end{pmatrix}$$

$$p(x,t+1) = \sum_{y=1,2,3} p_{xy} \cdot p(y,t). \qquad (x = 1,2,3)$$

行列 M で書く. x, y が成分番号

$$\vec{p}(t+1) = M\vec{p}(t).$$

確率ベクトル, 確率行列

確率分布

$$\vec{p}(t) = \begin{pmatrix} p(1,t) \\ p(2,t) \\ p(3,t) \end{pmatrix}$$

$$p(x,t) \geq 0, \quad \text{非負ベクトル}$$

$$\sum_x p(x,t) = 1 \quad \text{内積ではないけど ‘規格化’ という}$$

この性質を持つ $\vec{p}$ を確率ベクトルという.

推移確率行列

$$M = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

p_{xy} は, t に y にいたという条件のもとで, $t+1$ に状態 x にいる確率 この科目のローカルルール. ふつうはこの行列の転置をいう

$$p_{xy} \geq 0 \quad \text{非負行列}$$
$$\sum_x p_{xy} = 1$$

この性質を持つ M を確率行列という.

漸化式を解くと

$$\vec{p}(t) = M\vec{p}(t-1) = M^2\vec{p}(t-2) = \cdots = M^t\vec{p}(0).$$

M が確率行列, $\vec{p}$ が確率ベクトルのとき, $M\vec{p}$ も確率ベクトル (証明?)

L05-Q1

Quiz(マルコフ連鎖の推移確率行列)

$x = 1, 2, 3, 4$ 上のランダムウォークを考える.
時刻 $t = 0$ に $x = 2$ から出発する. 時刻 t に x にいたウォーカーは,

- 確率 $\frac{1}{7}$ で $x - 1$ に移動し
- 確率 $\frac{2}{7}$ で $x + 1$ に移動し
- 確率 $\frac{4}{7}$ で x にとどまる

ただし, 上のルールで, $x = 1$ から $x = 0$ や, $x = 4$ から $x = 5$ に移動しようとしたときは, 元の x にとどまるものとする.
これをマルコフ連鎖としてとらえたとき,

1. 推移図を書こう.
2. 推移確率行列を書こう.

L05-Q2

Quiz(推移確率行列)

上で, $x = 4$ の右隣が $x = 1$, のようにつながっているとすると?

確率過程, マルコフ連鎖

確率過程 t に依存する確率変数
その中の特に簡単なものが離散時間マルコフ連鎖. いま考えてる, 時間空間離散のランダムウォークはその一例.
離散時間 t が離散的
マルコフ Markov 推移確率 p_{xy} が直前の時刻の状態 y にしか依存しない
連鎖 chain 状態 X が離散的

ここまで来たよ

3 ランダムウォークの確率と漸化式と初期条件

4 マルコフ連鎖
- (復習)$p(x,t)$ の漸化式
- 確率ベクトル, 確率行列
- 定常分布, 分布の時間発展

定常分布

$\vec{p} = M\vec{p}$ となる確率分布 $\vec{p}$ のこと.

意味 $\boxed{}$

別の言い方をすると, M の $\boxed{}$

建設的心配性大爆発

- 定常状態っていつでもある?
- 固有値 (の絶対値) が 1 より大きな固有ベクトルがあったら?
- 固有値 1 の固有ベクトルが非負ベクトルじゃなかったら?

$\leftarrow$ (確率行列に対して使える) ペロン・フロベニウスの定理
固有値 1 があることはすぐにわかる.

分布の時間発展 I

L05-Q3

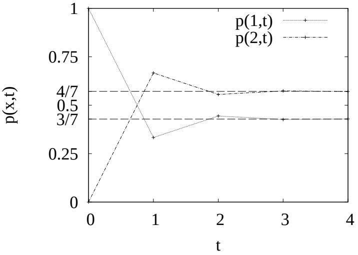
Quiz(マルコフ連鎖の定常状態)

次の推移確率行列を持つ, 状態空間 $\{1,2\}$ 上のマルコフ連鎖を考えよう.

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1. 定常分布をすべて求めよう.
2. 初期分布 $\vec{p}(0) = \binom{1}{0}$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう.
3. 初期分布 $\vec{p}(0) = \frac{1}{2}\binom{1}{1}$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう.

M^t の計算方法って?　線形代数


1
0.75
4/7
0.5
3/7
0.25
0
0
1
2
3
4
t
p(x,t)
p(1,t)
p(2,t)

L05-Q4

Quiz(マルコフ連鎖の定常状態)

次の推移確率行列に従う 状態空間 $\{1,2,3\}$ 上のマルコフ連鎖を考えよう.

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

1. 定常分布をすべて求めよう.
2. 初期分布 $\vec{p}(0) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう.

Hint: M の固有値固有ベクトルは $\lambda = 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

お知らせ

- 2016-05-11 水 3 実習の春のプチテスト
  - プチテスト出題計画を確定. 実施案内も参照. 当日はサンプルプログラムはないかもしれません.
    - ★ rand2 の変奏 指定された確率変数に対応する int getrandom(double) を書く
    - ★ est2 の変奏 与えられたデータから Excel で, 母平均値, 母分散, 母標準偏差, 母期待値, 母比率などを推定する
    - ★ rw19 の変奏 与えられた初期条件と確率変数 $R(t)$ の, ランダムウォークの座標 $X(t)$ の標本を抽出する
- 統計検定 団体受検 2016-06-19 日, 申込締切 2016-05-09 月
  `http://www.math.ryukoku.ac.jp/toukei-kentei/`

`https://manaba.ryukoku.ac.jp`
マイページの下の方に manaba 出席カード提出