

マルコフ連鎖の時間発展

樋口さぶろお

龍谷大学工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B L06(2016-05-16 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2016-05-16 Mon 17:42 JST hig"

今日の目標

- マルコフ連鎖の分布の極限分布への収束の様子を説明できる
- 確率シミュレーションで、条件を満たすランダムウォークのパスの母比率を区間推定できる



<http://hig3.net>

L05-Q1

Quiz 解答:マルコフ連鎖の推移確率行列

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & 0 & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

L05-Q3

Quiz 解答:マルコフ連鎖の定常状態

- ① 推移確率行列 M の固有値 λ , 固有ベクトル \vec{u} を求めると,

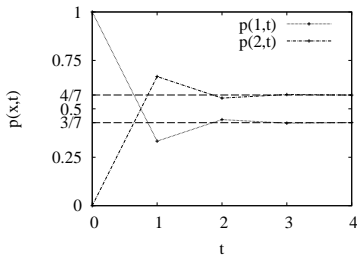
$$\lambda = 1, -\frac{1}{6}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

固有値 $\lambda = 1$ の固有ベクトルである確率ベクトルは $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ のみであり, これが唯一の定常分布

②

$$\vec{p}(t) = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{4}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{6}\right)^t$$

時間変化. $|\frac{1}{6}| < 1$ なので, $\vec{p}(t) \rightarrow \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (t \rightarrow +\infty)$



③

$$\vec{p}(t) = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{6}\right)^t$$

L06-Q4

Quiz 解答:マルコフ連鎖の定常状態

- ① 固有値 $\lambda = 1$ の固有ベクトルである確率ベクトルは $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のみであり、これが唯一の定常分布

②

$$\begin{aligned} \vec{p}(t) &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^t + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{4}\right)^t \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-(\log \frac{3}{2})t} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-(\log 4)t}. \end{aligned}$$

ここまで来たよ

3 マルコフ連鎖

4 マルコフ連鎖の時間発展

- マルコフ連鎖の時間発展
- 確率シミュレーションによる比率の推定
- ランダムウォークのパス (経路) の性質

マルコフ連鎖の時間発展

状態空間 $\{1, 2, 3\}$ 上のマルコフ連鎖.

$$\text{推移確率行列 } M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$\text{解 } \vec{p}(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^t + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{4}\right)^t$$

極限分布 $\vec{p}(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \vec{p}(t).$

今の場合, 初期分布 $\vec{p}(0)$ によらず,

固有値を絶対値の大きな順に並べて, $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$: 第 1, 第 2 固有値,

...

今の場合,

- 第1固有値は1
- 第1固有ベクトルは \vec{u}_1 は確率ベクトルで定常分布
- 第2以降の固有値の絶対値が1より小 ったことは ったことは

- 第2以降の固有ベクトルは

2番目に大きな固有値の絶対値が小さいほど、極限分布に速く収束する

マルコフ連鎖の定常分布

マルコフ連鎖の推移確率行列の固有値には、1が含まれる

証明

有限状態マルコフ連鎖では、実は定常分布が1つ以上は存在する。

いつでもこんなに簡単なの？ I

No. 可約だと簡単じゃない

L06-Q1

Quiz(可約なマルコフ連鎖の定常状態)

次の推移確率行列に従う 状態空間 $\{1, 2, 3\}$ 上のマルコフ連鎖を考える.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

- ① $\vec{p}(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき時間発展 $\vec{p}(t)$ を求めよう.
- ② $\vec{p}(0) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき時間発展 $\vec{p}(t)$ を求めよう.
- ③ 推移図を書こう.

既約 (irreducible) なマルコフ連鎖

どの状態からどの状態へも、確率 > 0 の矢印をたどって到達できるとき、マルコフ連鎖は (推移確率行列は) **既約** であるという。既約でないとき、**可約** であるという。

既約ならいつでもこんなに簡単なの? I

No. 周期的な状態があると簡単じゃない

L06-Q2

Quiz(マルコフ連鎖)

状態空間 $\{1, 2, 3\}$ 上のマルコフ連鎖を考える. 推移確率行列を次とする.

$$T_1(x|x') = T_{xx'} = \begin{array}{c|ccc} x \backslash x' & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

- 1 定常分布をすべて求めよう.
- 2 任意の初期分布は定常分布に近づくか考えよう.

周期的な状態

周期的な状態があると、絶対値 1 の固有値が複数ある。
このとき、極限分布があるとは限らない

L06-Q3

Quiz(周期的なマルコフ連鎖の定常状態)

次の推移確率行列に従う 状態空間 $\{1, 2\}$ 上のマルコフ連鎖を考える.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1 定常分布を求めよう.
- 2 $\vec{p}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう. 極限分布はある?
- 3 $\vec{p}(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう. 極限分布はある?

ここまで来たよ

3 マルコフ連鎖

4 マルコフ連鎖の時間発展

- マルコフ連鎖の時間発展
- 確率シミュレーションによる比率の推定
- ランダムウォークのパス (経路) の性質

ランダムウォークの座標・パス (経路) の標本

	$t = 0$	$t = 1$	\dots	$t = T$
$n = 1$	$X(0)^{(1)},$	$X(1)^{(1)},$	\dots	$X(T)^{(1)},$ 改行
$n = 2$	$X(0)^{(2)},$	$X(1)^{(2)},$	\dots	$X(T)^{(2)},$ 改行
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$n = N$	$X(0)^{(N)},$	$X(1)^{(N)},$	\dots	$X(T)^{(N)},$ 改行

Excel の関数: average, var, if(条件, 真のときの式, 偽の時の式), sum

Excel を使わないで母比率を推定

L06-Q4

例題

$t = 0$ に $x = 10$ から出発したランダムウォーカーが、 $t = 20$ で領域 $x < 0$ にいる母比率を推定しよう。

```
for(n){
    for(t){
        x=x+getrandom(getuniform());
    }
}
```

/*1*/
/*2*/
/*3*/
/*4*/
/*5*/
/*6*/

count=0, count+=1, printf("%f", (double)count/nmax), ..

母比率の区間推定 (復習)

標本比率 \hat{p} から, $\hat{p}(1 - \hat{p})$ が母分散であるかのようにして, 標準正規分布の場合の式を使う. 確率統計☆演習 I(2015)L11

母比率の区間推定

母比率の信頼係数 $1 - \alpha = 0.95$ の信頼区間は

$$\hat{p} - 1.96 \times \sqrt{\frac{1}{n}\hat{p}(1 - \hat{p})} < p < \hat{p} + 1.96 \times \sqrt{\frac{1}{n}\hat{p}(1 - \hat{p})}$$

母比率の信頼係数 $1 - \alpha = 0.99$ の信頼区間は

$$\hat{p} - 2.58 \times \sqrt{\frac{1}{n}\hat{p}(1 - \hat{p})} < p < \hat{p} + 2.58 \times \sqrt{\frac{1}{n}\hat{p}(1 - \hat{p})}$$

ここまで来たよ

3 マルコフ連鎖

4 マルコフ連鎖の時間発展

- マルコフ連鎖の時間発展
- 確率シミュレーションによる比率の推定
- ランダムウォークのパス (経路) の性質

パス (経路) の測定

- 座標 $X(T)$ (T 固定)
いままで特定の T を固定して $X(T)$ の「条件」の母比率を推定
- パス (経路) $(X(0), X(1), X(2), \dots, X(T))$ という組

$X(T)$ に関する比率

- $X(T) \geq 3$ である母比率
- \vdots

パスに関する比率

- $0 \leq t \leq T$ の範囲での $X(t)$ の最大値が 3 以上である母比率
- $0 \leq t \leq T$ の範囲で、ずっと $|X(t)| \leq 3$ である母比率
- $0 \leq t \leq T$ の範囲で、 $x = 1$ が 3 回以上訪れられる母比率
- \vdots

パスの母比率を推定するプログラム

別記

L06-Q5

パスの比率の確率シミュレーションによる測定

$x = 3$ を訪れた回数が 3 回以下であるときだけ 1 を返し, それ以外は 0 を返すような `int w(int path[], int tend)` を書こう.

お知らせ

- 月昼 樋口オフィスアワー (1-502)
- チューター/Math ラウンジ 月火水木昼 1-614
- 統計検定 勉強会 今回は受験しない人も歓迎 2016-05-26 木
<http://www.math.ryukoku.ac.jp/toukei-kentei/>
- 2016-09-18 土,19 日,20 祝授業実施 の教育工学会全国大会 (大阪大学)
見学ツアー計画中. 大会参加登録費は理工学会から補助してもらえ
るはず.



<https://manaba.ryukoku.ac.jp>
マイページの下の方に manaba 出席カード
提出

- 2016-05-30 月 4
- 外部記憶ペーパーなし
- 確率統計及び演習 I の外部記憶ペーパーをまとめて使えば?
<https://register.math.ryukoku.ac.jp/archive/>

出題計画 出題計画は 2016-05-24 火 に確定します。

- ランダムウォークの座標の漸化式, 確率 $p(x, t)$ の漸化式, マルコフ連鎖の推移図, マルコフ連鎖の推移確率行列のどれかが与えられたときどれかを求める
- 確率 $p(x, t)$ をいろいろな方法で求める
- ランダムウォークの $E[X(t)]$ や $V[X(t)]$ をいろいろな方法で求める
- ランダムウォークに関する確率を中心極限定理と正規分布を利用して求める
- C での乱数を使う
- ランダムウォークの座標の標本を抽出するプログラムを書く
- ランダムウォークの座標の母比率を区間推定するプログラムを書く

プログラミングの問題はありますが, Visual Studio や Excel の問題はありません。