連続型確率変数とその乱数

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B　L09(2016-06-13 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2016-06-13 Mon 17:49 JST hig"

今日の目標

- $[a, b)$ 一様擬似乱数生成のプログラムが書ける
- 確率変数の変換 $r = g(q)$ のもとでの確率密度変数の変換則が使える

http://hig3.net

L08-Q1

Quiz 解答:偏微分方程式　未知関数が 2 変数関数であるもの探してね.

L08-Q2

Quiz 解答:ラグランジュ表現とオイラー表現

1. 6 羽なのでサイズは 6.
各要素は, `x[]={1,1,3,3,3,8};` (順序はこうである必要はない. 自由にペンギン番号をつけてよい)
2. 座標が $x = 0, 1, 2, \ldots, 9$ の計 10 か所なので, サイズは 10.
各要素は `u[]={0,2,0,3,0,0,0,0,1,0};` (順序はこうである必要がある)

L08-Q3

Quiz 解答:オイラー表現とラグランジュ表現　2,6,8

ここまで来たよ

3 偏微分方程式とその数値計算

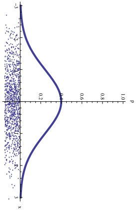
4 連続型確率変数とその乱数
- (復習) 連続型確率変数
- 確率変数の変数変換

離散型と連続型の確率変数

離散型:確率分布, 確率関数

得点 r_i	確率 $P(R=r_i)$
0	0.0667
1	0.2
2	0.3333
3	0.3
4	0.1

連続型:確率密度関数 $f(r)$



- $f(r)$ が大きいほど, その値 r が
- $0 \leq f(r)$.
- $f(r)$ は 1 を超えることもある.

連続型確率変数の母期待値 (復習)

母期待値の定義

離散型確率変数　$\mathrm{E}[\phi(X)] = \sum_{x} f(x) \cdot \phi(x).$　$f(x)$:確率関数, 確率分布

連続型確率変数　$\mathrm{E}[\phi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \phi(x)\,\mathrm{d}x.$　$f(x)$:確率密度関数

確率統計☆演習 I(2015)L07

$$1 = \mathrm{E}[1] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$P(x_0 \leq X \leq x_1) = \mathrm{E}[\mathbf{1}_{[x_0 \leq x \leq x_1]}(X)] = \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

例:$[a,b)$ 一様分布

L09-Q1

Quiz($[a,b)$ 一様分布)

次の確率密度関数を持つ連続的確率分布を考える.

$$f(x) = \begin{cases} C & (a \leq x < b) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

ここで, $a < b$, C は (無関係でない) は定数である.

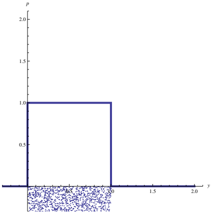
1. $\mathrm{E}[1] = 1$ から C を定めよう.
2. $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
3. $P(X \geq \frac{a+2b}{3})$ を求めよう.
4. $\mathrm{E}[X^2]$ を求めよう.
5. $\mathrm{V}[X]$ を求めよう.

一様 $\Leftrightarrow$ $f(y)$ が定数. 同様に確からしい.

連続型確率変数に対応する擬似乱数

$[0,1)$ 一様分布 (にしたがう確率変数)

$$f(y) = \begin{cases} 1 & (0 \leq y < 1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} n$$



に対応する擬似乱数は?

$\rightsquigarrow$ $[0,1)$ 一様乱数

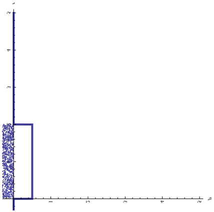
以後しばらく, Y と書いたら $[0,1)$ 一様分布/乱数のこと.

答: $\boxed{}$ をそのまま使えばいい.

$[0,2)$ 一様乱数を作るには?

$$f(r) = \begin{cases} \boxed{?} & (0 \le r < 2) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

```
double getrandom(double y){
  double r;
  r=???            ;
  return r;
}
r=getrandom(getuniform());
```



y	r
0.31	0.62
0.82	1.64
0.49	0.98
0.04	0.08
0.40	0.80

$$r = g(y) = \boxed{???}$$

考え方 1: グラフ拡大縮小

$$f_{\mathrm{Y}}(y) = \begin{cases} 1 & (0 \le y < 1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

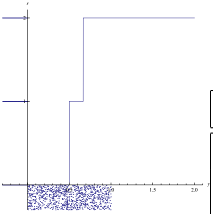
考え方 2: 母平均値や両端ををあわせる

離散型乱数の復習

今までは, Y を `int getrandom(double y)` で, 離散的な擬似乱数 R に ‘変換’ していた.

R	確率
0	$1/2$
1	$1/6$
2	$1/3$

```
int getrandom(double y){
  int r;
  if(y<3/6.0){
    r=0;
  }else if(y<(3+1)/6.0){
    r=1;
  }else{
    r=2;
  }
  return r;
}
```



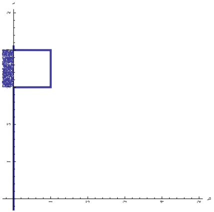
y	r
0.31	0
0.82	2
0.49	0
0.04	0
0.40	0

$$g(y) = \begin{cases} 0 & (0 \leq y < 1/2) \\ 1 & (1/2 \leq y < 2/3) \\ 2 & (2/3 \leq y < 1) \end{cases}$$

$[3,4)$ 一様乱数を作るには?

$$f(r) = \begin{cases} \boxed{?} & (3 \le r < 4) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

```
double getrandom(double y){
  double r;
  r=???          ;
  return r;
}
r=getrandom(getuniform());
```



y	r
0.31	3.31
0.82	3.82
0.49	3.49
0.04	3.04
0.40	3.40

$r = g(y) = \boxed{???}$.

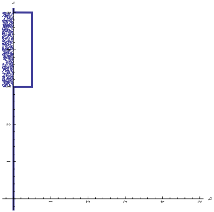
考え方 1: グラフ平行移動

$$f_{\mathrm{Y}}(y) = \begin{cases} 1 & (0 \le y < 1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

考え方 2: 母平均値や両端ををあわせる

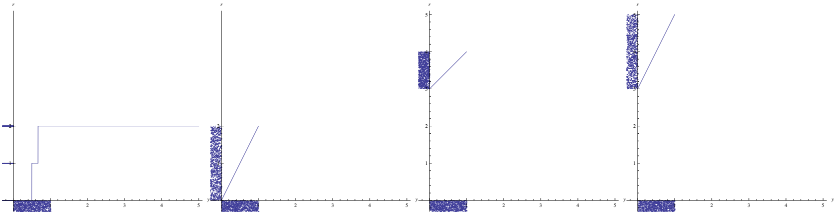
$[3,5)$ 一様乱数を作るには?

$$f(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (3 \leq r < 5) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$



$$r = g(y) = ???$$

$g(y)$ の設計方法の解釈



自分の言葉でどうぞ

L09-Q2

Quiz($[a, b)$ 一様乱数の生成)

次の確率密度関数を持つ確率変数 R を考える.

$$f(r) = \begin{cases} 1/5 & (-3 \le r < 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

R に対応する疑似乱数を返す関数 `double getrandom(double y)` を書こう. ただし, y としては $[0, 1)$ 一様乱数を代入する.

ここまで来たよ

3. 偏微分方程式とその数値計算

4. 連続型確率変数とその乱数
   - (復習) 連続型確率変数
   - 確率変数の変数変換

確率変数の変数変換

逆の問題. $g(y)$ がわかってるときに, $r = g(y)$ の確率密度関数 $f_R(r)$ は?
Q: 連続型確率変数 ('正方形クッキーの面積 or 生地の量'). 確率密度関数

$$f_Q(q) = \begin{cases} \frac{1}{36} & (64 \le q < 100) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

$R = g(Q) = \sqrt{Q}$: これも連続型確率変数 ('クッキーの一辺'),

問

確率密度関数 $f_R(r) = ?$

Q の乱数生成は簡単

```
double getrandom(double y){
  double r,q;
  r=a*y+b; /* [64,100) 一様乱数 */
  q=sqrt(r);
  return q;
}
```

標本

q	$r = \sqrt{q}$
81	9.00
96	9.80
⋮	⋮
64	8.00

R の確率密度関数 $f_R(r)$ は？ I

原理

$$P(g(a) \leq R < g(b)) = P(a \leq Q < b)$$
$$\int_{g(a)}^{g(b)} f_R(r)\,\mathrm{d}r = \int_a^b f_Q(q)\,\mathrm{d}q$$

確率密度関数の変換の原理+おぼえ方

$r = r(q) = g(q)$ とするとき,

$f(r)\,\mathrm{d}r$ は変数変換しても不変:

$$f_R(r) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}(q)} f_Q(q)$$

ただし, 右辺で $q = g^{-1}(r)$. g が単調減少関数の場合は絶対値をつけとけ.

L09-Q3

Quiz(確率変数の変換)

$[0,1)$ 一様分布に従う連続型確率変数 Q と, $R = g(Q) = aQ + b$ で定まる連続型確率変数 R を考える. ただし, $a > 0, b$ は定数である.

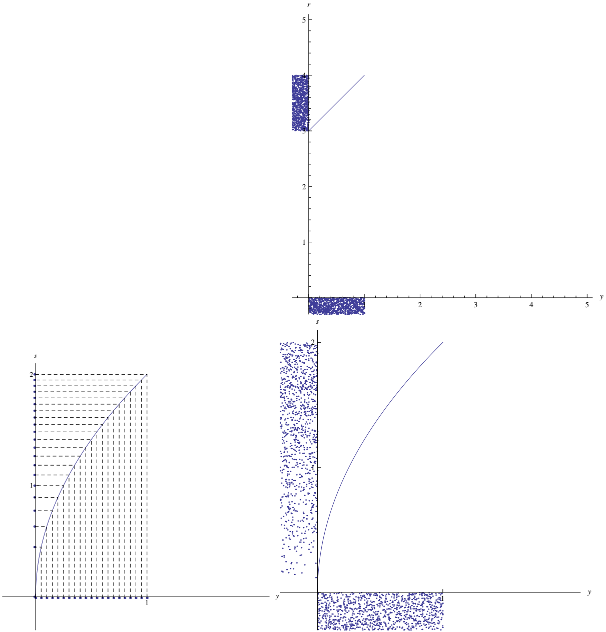
1. 確率 $P(R < \frac{1}{2}a + b)$ を求めよう.
2. R の確率密度関数 $f_R(r)$ を求めよう.

答:$R = g(Q) = \sqrt{Q}$ I

確率密度関数

$$f_Q(q) = \begin{cases} \frac{1}{36} & (64 \leq q < 100) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

$R = g(Q) = \sqrt{Q}$



g の傾き大 $\Leftrightarrow$ $f_R(r)$ 小.

L09-Q4

Quiz(確率変数の変換)

$[0,1)$ 一様分布に従う連続型確率変数 Y と, $R = g(Y) = \mathrm{e}^Y$ で定まる連続型確率変数 R を考える.

1. $\mathrm{E}[R^2]$ を求めよう.
2. $R < 2$ となる確率を求めよう.
3. R の確率密度関数 $f_R(r)$ を求めよう.

お知らせ

- 2016-06-20 月 臨時教室変更 3-B105 で実習 (初夏のプチテスト出題計画と無関係)
- 月昼 樋口オフィスアワー (1-502)
- チューター/Math ラウンジ 月火水木昼 1-614
- 初夏のプチテスト 2016-06-22 水 3

`https://manaba.ryukoku.ac.jp`
マイページの下の方に manaba 出席カード提出

リベンジ機会到来!!!

- 2016-06-22 水 3 初夏のプチテスト (プログラミング)
- 14 ピーナッツ．(旧カリキュラムの人は演習の 28 ピーナッツ/100)
- 春のプチテストと同様の非参照プログラミングのテスト．チームでなく個人別.
- 出題計画 (2016-06-15 水に確定します)．デバッガーはプログラムの完成に役立ちますが, debugger1, 操作方法など, デバッガーの使用が必須な問題は出題しません.
  - マルコフ連鎖の数値計算: 推移確率行列と初期分布が与えられたとき, 時刻 t の分布や期待値を求める．markov01 and/or markovexpect01
  - 単数ウォーカーの確率シミュレーション, 座標 or パス, 母比率 or 母期待値の区間推定 sim11
  - 複数ウォーカーの確率シミュレーション, 座標 or パス, 母比率 or 母期待値の区間推定 mrw02