逆関数法による乱数生成

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B　L10(2016-06-27 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2016-06-27 Mon 18:36 JST hig"

今日の目標

- 逆関数法で, 与えられた確率密度関数 $f_R(r)$ にしたがう確率変数 R の擬似乱数が生成できる.

http://hig3.net

L09-Q1

Quiz 解答:$[a, b)$ 一様分布

1. $C = \frac{1}{b-a}$.
2. $\mathrm{E}[X] = \frac{1}{b-a}\frac{1}{2}(b^2 - a^a) = \frac{1}{2}(a+b)$.
3. $P(X \geq \dfrac{a+2b}{3}) = \displaystyle\int_{(a+2b)/3}^{b} \frac{1}{b-a}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.
4. $\mathrm{E}[X^2] = \frac{1}{b-a}\frac{1}{3}(b^3 - a^3)$.
5. $\mathrm{V}[X] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 = \frac{1}{12}(b-a)^2$.

L09-Q2

Quiz 解答:$[a, b)$ 一様乱数の生成

```
double getrandom(double y){
  double s;
  s=5.0*y-3.0;
  return s;
}
```

L09-Q3

Quiz 解答:確率変数の変換

$$f_Q(q) = \begin{cases} 1 & (0 \leq q < 1) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$ なので,

1.

$$P(R < \tfrac{1}{2}a + b) = P(Q < \tfrac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} f_Q(q)\,\mathrm{d}q = \tfrac{1}{2}$$

2. $f_R(r)\mathrm{d}r = f_Q(q)\mathrm{d}q$ より，

$$f_R(r) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}} f_Q(q) = \frac{1}{a} \times f_Q(q) = \begin{cases} \frac{1}{a} & (b \le r < a+b) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

q と r の範囲に注意.

q	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
r		a		$a+b$	

なお，この $f_R(r)$ を先に求めた場合は，1 は次のように計算できる.

$$P(R < \frac{1}{2}a + b) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}a+b} f_R(r)\,\mathrm{d}r = 0 + \int_{b}^{\frac{1}{2}a+b} \frac{1}{a}\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}.$$

この $f_{\mathrm{R}}(r)$ は，L09-Q2 の `double getrandom(double y)` で生成される乱数の確率密度関数. ちゃんと一様になってるでしょ.

復習:正方形クッキーの質量から一辺の長さへの確率変数の変換 I

復習:正方形クッキーの質量から一辺の長さへの確率変数の変換 II

Quiz(確率変数の変換)

あるクッキー製造器が, ボールからとってくるひとかたまりの生地の質量は Q g である. 確率変数 Q は次の確率密度関数にしたがう.

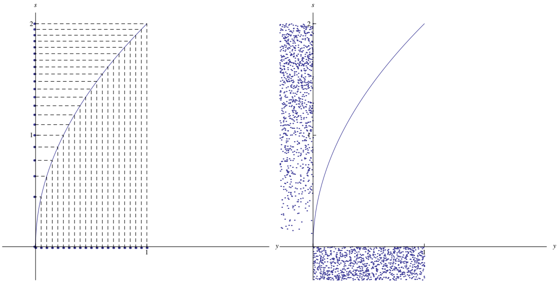
$$f_{\mathrm{Q}}(q) = \begin{cases} \frac{1}{36} & (64 \leq q < 100) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

クッキー製造器では, Q g の生地から, 一辺 $R = g(Q) = \sqrt{Q}$ cm の正方形のクッキーが焼ける (本当は比例定数あるけど省略).

1. Q の母平均値と母分散を求めよう.
2. 確率 $P(Q > 82)$ を求めよう.
3. クッキーの一辺 R cm のしたがう確率密度関数 $f_{\mathrm{R}}(r)$ を求めよう.
4. R の母平均値と母分散を求めよう (2 つの方法で).
5. 確率 $P(R > 9)$ を求めよう (2 つの方法で).

1. $\mathrm{E}[Q] = \int_{-\infty}^{+\infty} q\ f_{\mathrm{Q}}(q)\ \mathrm{d}q = \frac{64+100}{2}$
   $\mathrm{V}[Q] = \cdots = \frac{1}{12}(100-64)^2 = 108.$.
2. $P(Q > 82) = \mathrm{E}[\mathbf{1}_{[q>82]}(Q)] = \int_{82}^{100} \frac{1}{36}\ \mathrm{d}q = \frac{1}{2}$. これは Q が一様分布だから.
3.

$$f_{\mathrm{R}}(r) = \frac{1}{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{q}}} f_{\mathrm{Q}}(q) = 2r f_{\mathrm{Q}}(q(r)) = \begin{cases} \frac{r}{18} & (8 \le r < 10) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$



母期待値 $\mathrm{E}[\phi(Q)]$=母平均値 $\mathrm{E}[R]$ の推定

確率変数の変換 $R = \phi(Q) = g(Q)$ を考える.
座標の標本 $X^{(1)}(T), \cdots, X^{(N)}(T)$. 標本サイズ (例)$N = 1000$
標本からの推定

- 座標 Q の母平均値 $\mathrm{E}[Q]$ の推定値

$$\text{標本平均値} \quad \overline{X} = \frac{1}{N}[X^{(1)}(T) + \cdots + X^{(N)}(T)]$$

.

- 座標の関数 $R = \phi(Q)$ の母期待値 $\mathrm{E}[R]$ の推定値

$$\text{標本期待値} \quad \overline{\phi(Q)} = \overline{R} = \frac{1}{N}[R^{(1)} + \cdots + R^{(N)}], \quad R^{(i)} = \phi(X^{(i)}(T))$$

- R の母分散 $\mathrm{V}[R]$ の の推定値

$$\text{不偏標本分散} \quad S_R^2 = \frac{1}{N-1}[(R^{(i)} - \overline{R})^2 + \cdots (R^{(N)} - \overline{R})^2] = \frac{N}{N-1}[\overline{R^2} - (\overline{R})^2]$$

母期待値 $\mathrm{E}[\phi(Q)]$ の区間推定は, 母平均値 $\mathrm{E}[R]$ の区間推定と同じこと.

確率空間 (大学院)

(母分散未知の場合の) 区間推定

区間推定

$R=\phi(Q)$ の標本平均値 として m, 不偏標本分散 として s^2 が得られたとき, 母期待値 $\mu=\mathrm{E}[R]$ の,
信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間は

$$m - t_{\alpha/2}(N-1)\times\sqrt{s^2/N} < \mu < m + t_{\alpha/2}(N-1)\times\sqrt{s^2/N}$$

異なる シード で ［　　　］ とき, μ がこの不等式を満たす (=信頼区間に含まれる) 確率は $1-\alpha$.

標本サイズ N が大きくなると信頼区間は ［　　　］

信頼係数 $1-\alpha$ が大きくなると信頼区間は ［　　　］

計算科学☆実習 B(2016)L03 確率統計☆演習 I(2015)L11 確率統計☆演習 I(2015)L12

ここまで来たよ

3 連続型確率変数とその乱数

4 逆関数法による乱数生成
- 逆関数法
- 連続座標のランダムウォーク

逆関数法

Q が $[0,1)$ 一様分布にしたがう (f_Q が区分的に定数) ときでも, $R = g(Q)$ の確率密度関数 $f_\mathrm{R}(r)$ は定数ではない. 以下 $Q = Y$(一様分布)

逆に, 与えられた $f_R(r)$ にしたがう擬似乱数を作りたい $\rightarrow$ うまい g で $R = g(Y)$ として作ろう!

変数変換 $r = g(y)$

$[0,1)$ 一様にしたがう	y	0	$\rightarrow$	1
$f_\mathrm{R}(r)$ にしたがう	r	r_min	$\rightarrow$	r_max

$r_\mathsf{min}, r_\mathsf{max}$ は, $f(r) > 0$ となる r の下限, 上限.

$r = g(y)$ はどんな関数?

$$
\begin{aligned}
\text{原理 } f_{\mathrm{R}}(r)\ \mathrm{d}r =& f_{\mathrm{Y}}(y)\ \mathrm{d}y \\
\text{微分方程式 } f_{\mathrm{R}}(r)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}y} =& f_{\mathrm{Y}}(y)
\end{aligned}
$$

両辺を $y' = 0$ から y まで積分

$$
\begin{aligned}
\int_0^y f_{\mathrm{R}}(r)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}y}(y')\mathrm{d}y' =& \int_0^y f_{\mathrm{Y}}(y')\ \mathrm{d}y' \\
\int_{r_{\mathsf{min}}}^{r=g(y)} f_{\mathrm{R}}(r')\mathrm{d}r' =& y \\
P(R < g(y)) =& P(Y < y)
\end{aligned}
$$

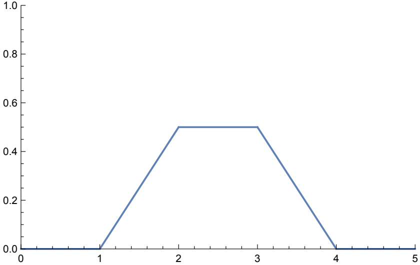
左辺を次のように呼ぶ.

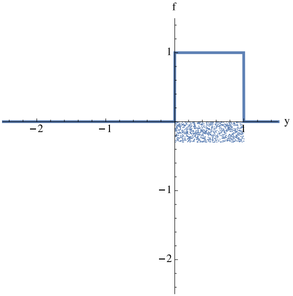
累積分布関数

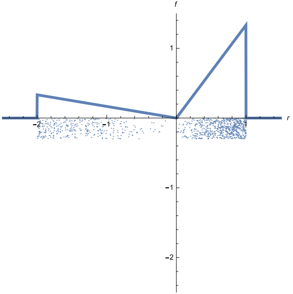
$$
F(r) = \int_{r_{\mathsf{min}}}^{r} f_{\mathrm{R}}(r')\ \mathrm{d}r' (= \int_{-\infty}^{r} f_{\mathrm{R}}(r')\ \mathrm{d}r')
$$

累積分布関数 $F(r)$ の意味

r	$-\infty$	r_{min}		r_{max}	$+\infty$
$f_{\mathrm{R}}(r) = F'(r)$	$0 \leftarrow$	0	≥ 0	0	$\rightarrow 0$
$F(r)$					







動画 `https://www.youtube.com/watch?v=cbgpdRW_5kQ`

逆関数法の手続き

書き直すと

$$F(g(y)) = y$$

乱数を作りたい確率変数 R の 累積分布関数 $F(r)$ の逆関数が $g(y)$.

逆関数法 (逆変換法)

$f_{\mathrm{R}}(r)$ に従う乱数を, $r = g(y)$ で $[0,1)$ 一様乱数 Y から作るには, $g(y)$ を次の様に決めればいい.

1. R の累積分布関数 $F(r) = \int_{-\infty}^{r} f_{\mathrm{R}}(r')\,\mathrm{d}r'$ を計算する.
2. 範囲 $0 \le y < 1, r_{\mathsf{min}} \le r < r_{\mathsf{max}}$ で, $y = F(r)$ を解いて, 逆関数 $r = F^{-1}(y) = g(y)$ を求める.

```
double getrandom(double y){ /*yは[0,1)一様乱数*/
  return g(y); /* 上で求めた式を書く */
}
```

L10-Q1

Quiz(逆変換法)

確率密度関数

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{1}{2}r & (0 \leq r < 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

に従う乱数 R を, $[0,1)$ 一様乱数 y から $r = g(y)$ で作りたい. $g(y)$ を求めよう.

L10-Q2

Quiz(逆関数法)

確率密度関数

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{2}}{8}\sqrt{r} & (0 \leq r < 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

に従う乱数 R を, $[0,1)$ 一様乱数 y から $r = g(y)$ で作りたい. $g(y)$ を求めよう.

L10-Q3

Quiz($[a, b)$ 一様乱数の生成)

次の確率密度関数を持つ確率変数 R を考える.

$$f(r) = \begin{cases} 1/5 & (-3 \leq r < 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

R に対応する疑似乱数を返す関数 `double getrandom(double y)` を書こう. ただし, y としては $[0, 1)$ 一様乱数を代入する.

L10-Q4

Quiz(連続的な値をとる疑似乱数)

次の確率密度関数を持つ確率変数 R を考える.

$$f(r) = \begin{cases} 4/3 & (1/4 \leq r < 1/2) \\ 8/3 & (1/2 \leq r < 3/4) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

R に対応する疑似乱数を返す関数 `double getrandom(double y)` を書こう.

ここまで来たよ

3 連続型確率変数とその乱数

4 逆関数法による乱数生成
- 逆関数法
- 連続座標のランダムウォーク

連続座標のランダムウォーク

$t \in \mathbb{Z}$: 時刻 時間離散

$$X(t+1) = X(t) + R(t+1)$$

これまで 空間離散 (離散座標), 時間離散ランダムウォーク
$R(t)$ 整数値をとる離散型確率変数 $\rightsquigarrow$ $X(t)$ 整数値をとる離散型確率変数
離散型確率変数 $R(t)$ は確率関数 $P(R=k)=p_k$ で指定される.

これから 空間連続 (連続座標), 時間離散ランダムウォーク
$R(t)$ 連続型確率変数 $\rightsquigarrow$ $X(t)$ 連続型確率変数
連続型確率変数 $R(t)$ は確率密度関数 $f_R(r)$ で指定される.
オイラー表現によるマルコフ連鎖の数値計算はできない…

確率シミュレーションで.

お知らせ

- 任意レポートは ~~2016-06-29 水まで~~ $\rightarrow$ 2016-07-06 水まで
- 月昼 樋口オフィスアワー (1-502)
- チューター/Math ラウンジ 月火水木昼 1-614

`https://manaba.ryukoku.ac.jp`
マイページの下の方に manaba 出席カード提出