連続座標ランダムウォークと中心極限定理

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B L11(2016-07-04 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2016-07-04 Mon 17:23 JST hig"

今日の目標

- 連続座標ランダムウォークの確率シミュレーションのプログラムが書ける
- 連続座標ランダムウォークに関わる母期待値, 母比率が推定できる

http://hig3.net

L11-Q1

Quiz 解答:逆変換法　r の累積密度関数は, $0 \le r < 2$ に対して
$F(r) = \int_{-\infty}^{r} f_R(r')\,\mathrm{d}r' = \int_0^r \frac{1}{2} r'\,\mathrm{d}r' = \frac{1}{4} r^2$.
$0 \le y < 1, 0 \le r < 2$ で $y = \frac{1}{4} r^2$ を解くと, $r = g(y) = 2\sqrt{y}$.

L11-Q2

Quiz 解答:逆関数法　r の累積分布関数は, $0 \le r < 2$ で
$F(r) = \int_0^r \frac{3\sqrt{2}}{8} \sqrt{r'}\,\mathrm{d}r' = 2^{-3/2} r^{3/2}$.
$0 \le y < 1, 0 \le r < 2$ の範囲で $y = 2^{-3/2} r^{3/2}$ を解くと,
$r = g(y) = 2y^{2/3}$.

L10-Q3

Quiz 解答:$[a, b)$ 一様乱数の生成

```
double getrandom(double y){
  double s;
  s=5.0*y-3.0;
  return s;
}
```

ここまで来たよ

3 逆関数法による乱数生成

4 連続座標ランダムウォークと中心極限定理
- 連続座標のランダムウォーク
- 応用 1:ギャンブラー破産問題とランダムウォーク
- 応用 2:2 次元ランダムウォークとパターン形成の DLA モデル
- 中心極限定理を利用したらランダムウォークの解析

連続座標のランダムウォーク

$$\text{漸化式 } X(t+1) = X(t) + R(t+1)$$

$$\text{初期条件 } X(t_0) = X_0$$

時間離散 $t \in \mathbb{Z}$: 時刻
空間連続 $X(t), x \in \mathbb{R}$: 座標
$R(t) \in \mathbb{R}$ は座標の変化量．独立同分布にしたがう連続型確率変数 $\to$ 確率密度関数 $f_{\mathrm{R}}(r)$ で記述される．
$\rightsquigarrow$ $X(t)$ も連続型確率変数．確率密度関数 $f_{\mathrm{X}}(x)$ で記述．

連続座標ランダムウォークの解析方法

これまでこれまでの空間離散 (離散座標) ランダムウォークと対比して, 連続座標では,

- 2 項定理による確率の計算はできない ${}_tC_x$ の x は整数であり実数でない.
  計算科学 (2015)L02
- 推移確率行列を用いたマルコフ連鎖の計算はできない. M_{xy} の x, y は整数であり実数ではない.
  - マルコフ連鎖は, マルコフ過程の中で, x が離散的である特別な場合.
  - 連続座標のランダムウォークは一般のマルコフ過程.
  - 連続座標のマルコフ過程では M_{xy} は (条件つき) 確率密度関数 $f(x|y) = P(X(t+1) = x|X(t) = y)$.
- 確率シミュレーションは可能
  - オイラー表現は不便 (`u[x]` の x は整数であり実数になれない)
  - ラグランジュ表現はあまり変更せずに使える.
    `int t; double r,x; double path[TMAX];` 関数の引数, 返り値の型もそれなりに変更.
- 中心極限定理を用いた計算はあまり変更せず使える

ラグランジュ表示での有限空間の離散/連続座標ランダムウォーク

- 離散座標のとき, 整数全体 $x \in \mathbb{Z}$
- 連続座標のとき, 実数全体 $x \in \mathbb{R}$

のランダムウォークを考えていた. 有限空間

- 離散座標のとき, 整数 $x = 0, 1, 2, \ldots, L$
- 連続座標のとき, 実数の区間 $x \in (0, L)$

に制限して考えることもできる. $\to$ 境界条件
壁 $x = 0$ の境界条件を考える. $X(t) + R(t+1) \leq 0$ となったときの処理.
吸収壁境界条件 $X(t+1) = \boxed{}$ そのウォーカーはそれ以上動かさない.
反射壁境界条件 $X(t+1) = \boxed{}$.
周期的境界条件 $X(t+1) = \boxed{}$.

ここまで来たよ

3 逆関数法による乱数生成

4 連続座標ランダムウォークと中心極限定理
- 連続座標のランダムウォーク
- 応用 1:ギャンブラー破産問題とランダムウォーク
- 応用 2:2 次元ランダムウォークとパターン形成の DLA モデル
- 中心極限定理を利用したらランダムウォークの解析

ギャンブラー破産問題とランダムウォーク

$X(t)$: t 回目の賭け時点での持ち金
$R(t)$: t 回目の賭けでもうかる (負なら失う) 金額. 確率変数.
$X(t+1) = X(t) + R(t+1)$.
0 円になったらそこで破産して終了 $\rightsquigarrow$ $x = 0$ が吸収壁

ここまで来たよ

3 逆関数法による乱数生成

4 連続座標ランダムウォークと中心極限定理

- 連続座標のランダムウォーク
- 応用 1:ギャンブラー破産問題とランダムウォーク
- 応用 2:2 次元ランダムウォークとパターン形成の DLA モデル
- 中心極限定理を利用したらランダムウォークの解析

2 次元ランダムウォークとパターン形成 DLA モデル

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:
Lichtenberg_figure_in_block_of_Plexiglas.jpg
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:DLA_Cluster.JPG

2 次元ランダムウォーク

1 次元ランダムウォーク

```
x=0;
for(t){
  x+=getrandom(getuniform());
}
```

離散座標の場合の中身は

```
x=0;
for(t){
  z=getuniform();
  if(z<0.5){
    x+=1;
  } else {
    x-=1;
  }
}
```

2 次元ランダムウォーク

1 次元ランダムウォーク　x 軸上をランダムに移動　$X(t)$
2 次元ランダムウォーク　xy 平面上をランダムに移動　$(X(t), Y(t))$

離散座標

```
x=0;y=0;
for(t){
  z=getuniform();
  if(z<0.25){
    x+=1;
  } else if(z<0.5)
    x-=1;
  } else if(z<0.75)
    y+=1;
  } else {
    y-=1;
  }
}
```

連続座標．移動距離もランダムにしてもいい．

```
x=0.0;y=0.0;
for(t){
  z=getuniform();
  x+=cos(2*M_PI*z);
  y+=sin(2*M_PI*z);
}
```

DLA=Diffusion Limit Aggregation 拡散律速凝集のルール

- 原点に「枝の種」=吸収壁を置く
- 粒子をどこかに置いてランダムウォーク．粒子が枝に接触したらウォーク終了 (吸収壁)
  粒子は枝に固着する $\rightsquigarrow$ 吸収壁が成長．
- 粒子をどこかに再度おいてランダムウォーク．

https://www.youtube.com/watch?v=uBy3Uouy76Q

1 次元と 2 次元の中間の図形　　応用数理 A

iOS アプリ by Daishin Ueyama
http://home.mims.meiji.ac.jp/~daishin/TheDLA/index-j.html

	テトリス	DLA
オイラー表現	積み上がるブロック	枝
ラグランジュ表現	落ち中のブロック	ランダムウォーカー
	横ランダム, 縦等速直線運動	縦横ランダム
	4 ブロック, 回転あり	1 ブロック, 回転なし

ここまで来たよ

3 逆関数法による乱数生成

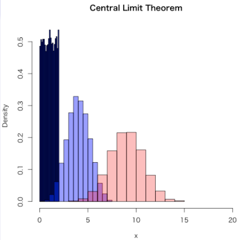
4 連続座標ランダムウォークと中心極限定理
- 連続座標のランダムウォーク
- 応用 1:ギャンブラー破産問題とランダムウォーク
- 応用 2:2 次元ランダムウォークとパターン形成の DLA モデル
- 中心極限定理を利用したらランダムウォークの解析

復習:中心極限定理 (いいかげんバージョン)

$R_1, \ldots, R_T$ が母平均値 μ, 母分散 σ^2 の独立同分布に従うとき,

- $X_T = R_1 + \cdots + R_T$, の確率分布は, $T \to +\infty$ で, 正規分布 $\mathrm{N}(T \cdot \mu, T \cdot \sigma^2)$ に似る

確率統計☆演習 I(2015)L09　計算科学☆実習 (2016)L02



$\rightsquigarrow$

ランダムウォークの座標 $X(T)$ の確率分布は, T が大きいとき, 母平均値 $x(0) + T \cdot \mu$, 母分散 $T \cdot \sigma^2$ の正規分布にほぼ従う.

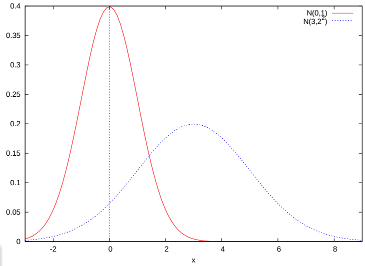
復習:1 変数の正規分布

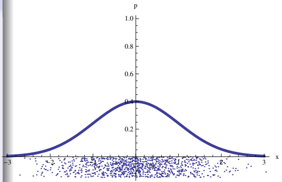
標準正規分布の確率密度関数

$$f_{\mathrm{Z}}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}$$

$X = aZ + b$ を考える. 確率統計☆演習 II(2016)L06

確率密度関数は, z のところに $z = \frac{x-b}{a} = \frac{x-\mu}{\sigma}$ を代入すればいいので,





正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ の確率密度関数

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

パラメタ μ(= 実は $\mathrm{E}[X]$),

σ^2(= 実は $\mathrm{V}[X]$).

確率統計☆演習 I(2015)L08

L11-Q1

Quiz(確率シミュレーションと中心極限定理)

B 湖の毎日の水位の変化は, 独立な確率変数で, 確率密度関数

$$f(r) = \begin{cases} 1/3 & (-1 \leq r < 2) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

にしたがう.
0 日に水位は 100cm だった.

1. 30 日の水位の母平均値と母分散を求めよう.
2. 30 日の水位が 120cm 以上 125cm 未満である確率を求めよう.

ただし, 解析的には値が求められないときは, 定積分の形で答えてよい.

L11-Q2

Quiz(確率シミュレーションと中心極限定理)

B 湖の毎日の水位の変化は, 独立な確率変数で, 確率密度関数

$$f(r) = \begin{cases} -\frac{2}{25}(r-4) & (-1 \le r < 4) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

にしたがう.
0 日に水位は 100cm だった.

1. 30 日の水位の母平均値と母分散を求めよう.
2. 30 日の水位が 120cm 以上 130cm 未満である確率を求めよう.

ただし, 解析的には値が求められないときは, 定積分の形で答えてよい.

逆関数法を用いて, R の $r = g(y)$ =`double getrandom(double y)` を書こう.

次のうちどれは中心極限定理+解析的計算でできる?

1. 10 日目から 20 日目までの水位の増分の母平均値
2. 0 日から 30 日目までずっと 120cm を越えない母比率
3. (15 日目の水位)^3 の母平均値
4. 120cm を越えない日数の母平均値
5. 30 日間の最大水位の母平均値

夏のプチテスト (プログラミング)

- 2016-07-27 水 3 夏のプチテスト (プログラミング)
- 14 ピーナッツ. (旧カリキュラムの人は演習の 28 ピーナッツ/100)
- 春, 初夏のプチテストと同様の非参照プログラミングのテスト. チームでなく個人別.
- 出題計画 (2016-07-20 水に確定します). デバッガーはプログラムの完成に役立ちますが, debugger1, 操作方法など, デバッガーの使用が必須な問題は出題しません.
    - 連続型確率変数の乱数生成, 連続型確率変数の標本のヒストグラム作成 (cont15,inverse01)
    - 連続座標のランダムウォークの確率シミュレーション (contrwsim01 の一部分)
    - 未定

お知らせ

- 任意レポートは ~~2016-06-29 水まで~~ $\to$ 2016-07-06 水までに授業内紙提出.
- もっと大きい点数の, だけどもっと大変な任意プレゼンテーション準備中
- 2016-07-29 金に実習の補講が通知されますが, これは, 夏のプチテスト (プログラミング) の日が台風などで全学休講になった場合の予備日で, 台風が来ないかぎりは実施しません.
- 月昼 樋口オフィスアワー (1-502)
- チューター/Math ラウンジ 月火水木昼 1-614

`https://manaba.ryukoku.ac.jp`
マイページの下の方に manaba 出席カード提出

標準正規確率表 (上側確率$=Q(z)=1-F(z)$)

$Z\sim \mathrm{N}(0,1^2)$. z に対する $Q(z)=P(Z>z)=1-F(z)$ の値の表.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010