モンテカルロ数値積分

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B L13(2016-07-18)

最終更新: Time-stamp: "2016-07-18 Mon 17:22 JST hig"

今日の目標

- モンテカルロ法を説明できる
- モンテカルロ数値積分で定積分の値を区間推定できる
- 希望の信頼区間にあわせてサンプルサイズを選べる

http://hig3.net

ここまで来たよ

3 モンテカルロ数値積分
- モンテカルロ数値積分

モンテカルロ法 Monte Carlo Method

モンテカルロ法

確率的/決定的な量を計算するのに, 確率変数の標本抽出を実際にコンピュータで乱数を使って行う方法

計算科学 B(2016)L01

これまでこの科目で作ってきたプログラムは, 確率的な量を計算するためのモンテカルロ法のプログラム
=確率シミュレーション モンテカルロシミュレーション
それでは, 決定論的な量を計算するモンテカルロ法とは?
なお,

- モンテカルロ=モナコ公国の都市
- 世の中では MCMC 法=Markov 連鎖 Monte Carlo 法 がはやり. しかし, この授業でやったのは MC であり MCMC ではない. 理論物理学特論

モンテカルロ数値積分

決定論的な (確率と無関係な) 問題

定積分 $\int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x$ を (数値で) 計算せよ.

数値計算法 (台形公式, シンプソン公式)

$[a, b)$ 一様分布にしたがう連続型確率変数 X を考える. 確率密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\begin{cases} 1 & (a \le x < b) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

定積分 $=$区間の長さ $\times$ 母期待値 $\approx$区間の長さ $\times$ 標本期待値

$$\int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x \overset{!}{=} (b-a)\mathrm{E}[\phi(X)] \overset{\text{推定}}{\approx} (b-a)\overline{f(X)}$$

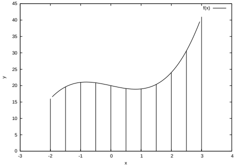
$$= \frac{b-a}{N}[\phi(x_1) + \cdots + \phi(x_N)]$$

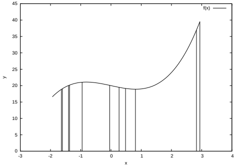
モンテカルロ数値積分の手順

```
for(n=0;n<N;n++){
   積分区間[a,b) を範囲とする一様擬似乱数x を得る;
   z=φ(x);
   printf("%f\n",z);
}
/* ここから後はプログラムでもExcelでも手動でも */
z の標本平均値 (φ(x) の標本期待値)を求める;
z の不偏標本分散を求める;
定積分の値を標本平均値×(b−a) で点推定;
定積分の値を不偏標本分散も使って区間推定;
```

台形公式と比べたモンテカルロ数値積分の利点

- アルゴリズムが簡単
- 端や不連続点の考慮が不要 (っていうかできない)
- N を自由にとれる．計算資源に応じて N を後から増やせばそれだけ精度があがる．
- 誤差 (=信頼区間の幅) はどんな場合でも $N^{-1/2}$ に比例．
  - 台形公式では誤差の N 依存性は積分の次元 (何重積分か) による．
  - 高次元ではモンテカルロ数値積分法が勝つ．10 重積分とか…





実習サンプルを改造してモンテカルロ数値積分してみよう．

区間推定の誤差と標本サイズ

標本サイズ N が大きいときの母平均値の信頼係数 0.95 の信頼区間

$$\overline{Z} - 1.96\sqrt{\frac{S^2}{N}} < \mu_Z < \overline{Z} + 1.96\sqrt{\frac{S^2}{N}}$$

S^2: $Z = \phi(X)$ の不偏標本分散
$\overline{Z} = \overline{\phi(X)}$ の信頼区間の長さ

$$1.96\sqrt{\frac{S^2}{N}} \times 2 \cdots N^{-1/2}\text{に比例して小さくなる=正確になる}$$

$(b-a)\overline{\phi(X)}$ の信頼区間の長さはその $(b-a)$ 倍.
信頼区間の長さを 1/10 にしたかったら, 標本サイズ N を 10^2 倍にしろっ
S^2 も毎回変わるけど, N^α に比例するわけではないから定数とみなす.

多次元モンテカルロ数値積分

$$I = \int_R \phi(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

D は区間 $\times$ 区間とはかぎらない!
D をぎりぎり含む長方形領域 $[a, b) \times [c, d)$ を考える.

$$\phi_D(x, y) = \begin{cases} \phi(x, y) & ((x, y) \in D) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

$$I = (d-c)(b-a) \times \mathrm{E}[\phi_D(X, Y)] \approx \frac{(d-c)(b-a)}{N}\overline{\phi_D(X, Y)}.$$

1 次元でも, 一様乱数の範囲 $[a, b)$ はこのように広めにとることができる.

多次元モンテカルロ数値積分の手順

```
for(n=0;n<N;n++){
   [a,b) 一様擬似乱数x を得る;
   [c,d) 一様擬似乱数y を得る;
   if( (x,y) ∈ D ){
        z=φ(x,y);
   }else{
        z=0;
   }
   printf("%f\n",z);
}
/* ここから後はプログラムでもExcelでも手動でも */
z の標本平均値 (φ1(x,y) の標本期待値)を求める;
z の標本分散を求める;
定積分の値を標本平均値×(d−c)(b−a) で点推定;
定積分の値を不偏標本分散も使って区間推定;
```

夏のプチテスト (プログラミング)

- 2016-07-27 水 3 夏のプチテスト (プログラミング)
- 14 ピーナッツ. (旧カリキュラムの人は演習の 28 ピーナッツ/100)
- 春, 初夏のプチテストと同様の非参照プログラミングのテスト.
- 出題計画 (2016-07-20 水に確定します). デバッガーはプログラムの完成に役立ちますが, debugger1, 操作方法など, デバッガーの使用が必須な問題は出題しません. Excel や R Commander でのグラフ作成はあります.
    - 連続型確率変数を変換しそのヒストグラムを描く (conttransf01) 逆関数法はファイナルトライアル (筆記) で出題し, 今回は出題しません. 変換後の確率密度関数を求める問題はファイナルトライアル (筆記) で出題し, 今回は出題しません.
    - 連続座標ランダムウォークのまたは自己回帰モデルの確率シミュレーション (contrwsim01 , arsim01) 問題は水位や漁獲量でなくランダムウォークや自己回帰モデル用語で書きます.
    - 区間と関数が与えられたとき, 定積分の値を, モンテカルロ数値積分で区間推定する (mcint2).

ファイナルトライアル (筆記)

- 2016-08-01 月 4
- 25 ピーナッツ.
- 時間内に作成する外部記憶ペーパー使用可.
- 出題計画 (2016-07-20 水に確定します).
  - オイラー表現とラグランジュ表現 (L08-Q2)
  - 偏微分方程式, オイラー表現とラグランジュ表現 (L08, 計算 or 選択肢 or 記述問題)
  - 連続型確率変数の確率, 母平均値, 母分散, 母期待値 (L09-Q1)
  - 連続型確率変数の確率密度関数の変換 (L09-Q3,Q4) $times1 \sim 2$m 問
  - 逆関数法による乱数生成 (L10-Q1,2,3,4) $g(y)$ を求める $times1 \sim 2$m 問
  - 中心極限定理を用いた母平均値と母比率の計算 (L11-Q11,Q12)
  - 時系列解析 (L12, 移動平均の意味, 自己相関係数の意味の選択肢 or 記述問題)

お知らせ

- 全学授業アンケート manaba から.
- 2016-07-29 金 1 に実習の補講が通知されてますが, これは, 夏のプチテスト (プログラミング) の日が台風などで全学休講になった場合の予備日で, 台風が来ないかぎりは実施しません.
- 月昼 樋口オフィスアワー (1-502)
- チューター/Math ラウンジ 月火水木昼 1-614

`https://manaba.ryukoku.ac.jp`
マイページの下の方に manaba 出席カード提出