離散座標ランダムウォークの座標の確率・母平均値・母分散

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B L02(2017-04-17 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2017-04-17 Mon 18:59 JST hig"

今日の目標

- ランダムウォークの用語を読める, 使える
- 二項分布とその正規近似を使って, ランダムウォークの座標の確率・母期待値・母分散が計算できる

http://hig3.net

L01-Q1

Quiz 解答:連続的な確率変数の母平均値・母分散・母標準偏差・確率 (一様分布)

1. $\mathrm{E}[\cos(\pi X)] = \int_{5/2}^{3} 2\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x = [\frac{2}{\pi}\sin(\pi x)]_{5/2}^{3} = -\frac{2}{\pi}$
2. $P(\frac{22}{8} < X < \frac{23}{8}) = \mathrm{E}[\mathbf{1}_{[\frac{22}{8}<X<\frac{23}{8}]}(X)] = \int_{22/8}^{23/8} 2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$

L01-Q2

Quiz 解答:擬似乱数の使いかた

ソースコード 1: 乱数

```
double getrandom(double y){
  if(y<0.3){
    return 0.4;
  }
  return 0.6;
}
```

L01-Q3

Quiz 解答:離散的な乱数の生成

```
int getrandom(double y){
  if(y<2.0/8.0){
    return 1;
  } else if (y<(2.0+1.0)/8.0){
    return 2;
  } else {
    return 3;
  }
}
```

L01-Q4
Quiz 解答:期待値

```
int getrandom(double y){
  if(y<2/13.0){
    return 0;
  } else if (y<(2+4)/13.0){
    return 3;
  } else {
    return 4;
  }
}
```

値 $R=3$ が返される確率の検算.
$P(R=3)=P(Y<2/13$ でない かつ $Y<6/13)=P(2/13\leq Y<6/13)=\int_{2/13}^{6/13}1\,\mathrm{d}y=4/13.$

ここまで来たよ

ランダムウォーク

ランダムウォークの定義

$R(t)$: 独立同分布に従う離散型確率変数. $t = 1, 2, 3, \ldots$
$X(t)$: 次で決まる確率変数. $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$
\begin{aligned}
X(a) &= b \\
X(t+1) &= X(t) + R(t+1)
\end{aligned}
$$

$R(t)$ が ベルヌーイ分布 塚田確率統計 §4.1 $\mathrm{B}(1, p)$
にしたがうとき (例 $p = \frac{2}{3}$),

$$
確率\ P(R(t) = r) = \begin{cases} p = \frac{2}{3} & (r = 1) \\ 1 - p = \frac{1}{3} & (r = 0) \\ 0 & (他) \end{cases}
$$

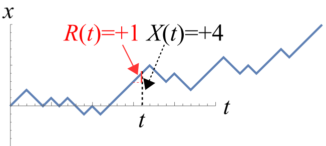
$X(a) = b$ という条件は, 正確に言うと

$$P(X(a) = x) = \begin{cases} 1 & (x = b) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

日本語で言うと,

- x 軸上を移動するランダムウォーカーを考える
- ウォーカーは, 時刻 $t = a$ に, $x = b$ から出発する (確率が 1 である)
- ウォーカーは各時刻に, 確率 $2/3$ で $+1$ だけ移動し, 確率 $1/3$ で移動しない

$X(T)$: 時刻 T のランダムウォーカーの座標 (を確率変数とみたもの)
$(X(0), X(1), X(2), \ldots, X(T))$: パス (path) (を確率変数とみたもの)



こんなこと考えます

座標 $X(t)$ について, 手計算で以下の母ナントカを求めよう.
(次回以降:プログラムを書いて標本から推定しよう)

- $\mathrm{E}[X(2)]$, $\mathrm{V}[X(2)]$, $\mathrm{E}[\mathrm{e}^{X(2)}]$, $P(X(2) > 1)$
- $\mathrm{E}[X(1002)]$,$\mathrm{V}[X(1002)]$ $\mathrm{E}[\mathrm{e}^{X(1002)}]$, $P(X(1002) > 51)$
- $P(X(50) = 12$ かつ $X(100) = 25)$

それぞれ日本語で言うと?

ランダムウォークの座標の分布=二項分布

簡単のため, $X(0) = 0$ とする.
$X(T) = 0 + R(1) + R(2) + \cdots + R(T)$.
$X(T)$ は, T 回の独立なコイントス (ベルヌーイ試行 $\mathrm{B}(1, p)$) で表がでる回数だから, 二項分布 $\mathrm{B}(T, p)$ に従う.

塚田確率統計 §4.2

$$P(X(T) = x) = \binom{T}{x} p^x (1-p)^{T-x} \qquad (0 \leq x \leq T)$$

L02-Q1

Quiz(ランダムウォークの確率と座標の期待値)

離散ランダムウォークで, $X(0) = x_0 = 0$, $X(t+1) = X(t) + R(t+1)$,

$$P(R(t) = r) = \begin{cases} p & (r = 1) \\ 1 - p & (r = 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

のとき,

1. $P(X(3) = x)$ を求めよう ($x = 0, 1, \ldots$ は整数).
2. $\mathrm{E}[X(3)]$ を求めよう.
3. $\mathrm{V}[X(3)]$ を求めよう.
4. $X(3) > 1$ となる確率を求めよう.

ここまで来たよ

ランダムウォークの座標の母平均値と母分散

$R(t) \sim \mathrm{B}(1, p)$ のとき,

二項分布の性質

$$\mathrm{E}[X(T)] = T \times p$$
$$\mathrm{V}[X(T)] = T \times p(1-p)$$

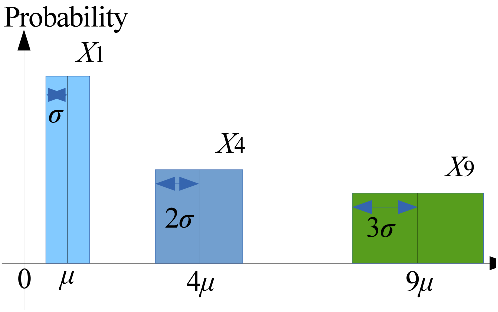
$R(t)$ 一般,, $X(T) = R(1) + \cdots + R(T)$, $R(t)$ が独立同分布にしがががうとき,

独立同分布にしたがう確率変数の和

$$\mathrm{E}[X(T)] = T \times \mathrm{E}[R(t)]$$
$$\mathrm{V}[X(T)] = T \times \mathrm{V}[R(t)]$$

$X(t)$ の母標準偏差 $= \sqrt{\mathrm{V}[X(T)]} = \boxed{}$

ってことは，ランダムウォークの座標の確率分布の時間変化はこんな感じ?



L02-Q2

Quiz(ランダムウォーカーの到達点の座標の母平均・母分散)

時刻 t におけるランダムウォーカーの座標 $X(t)$ を, 次の漸化式で定める ($t = 0, 1, 2, \ldots$).

$$X(t+1) = X(t) + R(t+1), \quad X(0) = 0$$

確率変数 $R(t)$ ($t = 1, 2, 3, \ldots$) は, 互いに独立, 同分布に従い,

- 確率 $5/9$ で $R(t) = -1$,
- 確率 $1/9$ で $R(t) = 0$,
- 確率 $3/9$ で $R(t) = +1$,

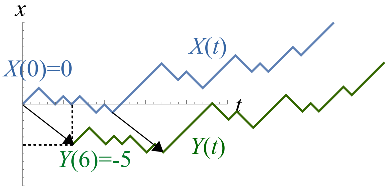
の値をとる.

1. $R(t)$ の母平均値を求めよう.
2. $R(t)$ の母分散を求めよう.
3. $R(t)$ の母標準偏差を求めよう.
4. $X(20)$ の母平均値を求めよう.
5. $X(20)$ の母分散を求めよう.
6. $X(20)$ の母標準偏差を求めよう.

ここまで来たよ

原点以外から出発するとき

$t = a$ に $x = b$ から出発するとき,
$X(T) = X(a) + R(a+1) + \cdots + R(T) = b + R(a+1) + \cdots + R(T)$.
$R(a+1) + \cdots + R(t)$ は独立同分布にしたがう確率変数の和だから今まで同様に考えられる.
$R(t)$ がベルヌーイ分布に従うなら, $R(a+1) + \cdots + R(T) \sim \mathrm{B}(T-a, p)$
一般に独立な確率変数の和は,
$\mathrm{E}[b + R(a+1) + \cdots + R(T)] = b + (T-a)\mathrm{E}[R(t)]$.
$\mathrm{V}[b + R(a+1) + \cdots + R(T)] = (T-a)\mathrm{V}[R(t)]$.



L02-Q3

Quiz(ランダムウォーカーの到達点の座標の母平均・母分散)

時刻 $t = -5$ に, $x = 2$ から出発するランダムウォークを考える.
時刻ごとに, ランダムウォーカーは,

- 確率 $2/3$ で $+1$,
- 確率 $1/3$ で 0,

だけ移動する. 時刻ごとの移動分は独立である.

1. 確率 $P(X(3) = 5)$ を求めよう.
2. $X(3)$ の母平均値を求めよう.
3. $X(3)$ の母分散を求めよう.
4. $X(3)$ の母標準偏差を求めよう.

L02-Q4

Quiz(ランダムウォーカーの到達点の座標の母平均・母分散)

時刻 $t=3$ に, $x=5$ から出発するランダムウォークを考える.
時刻ごとに, ランダムウォーカーは,

- 確率 $5/9$ で -1,
- 確率 $1/9$ で 0,
- 確率 $3/9$ で $+1$,

だけ移動する. 時刻ごとの移動分は独立である.

1. $X(7)$ の母平均値を求めよう.
2. $X(7)$ の母分散を求めよう.
3. $X(7)$ の母標準偏差を求めよう.

ここまで来たよ

1. ランダムウォークと離散型擬似乱数

2. 離散座標ランダムウォークの座標の確率・母平均値・母分散
    - ランダムウォークの座標の分布
    - ランダムウォークの座標の母平均値と母分散
    - 原点以外から出発するとき
    - 二項分布の正規近似

独立同分布を利用して中心極限定理で近似 (T が大きいとき)

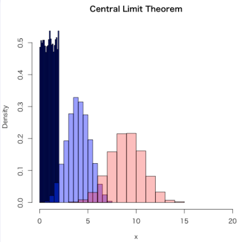
塚田確率統計 §5.3　塚田確率統計 §5.3.1　確率統計☆演習 I(2016)L9

中心極限定理 (いいかげんバージョン)

$R(1), \ldots, R(T)$ が母平均値 μ_{R}, 母分散 σ_{R}^2 の独立同分布に従うとき,

- $X(T) = R(1) + \cdots + R(T)$, の確率分布は, $T \to +\infty$ で, 正規分布 $\mathrm{N}(T \cdot \mu_{\mathrm{R}}, T \cdot \sigma_{\mathrm{R}}^2)$ に似る

確率統計☆演習 I(2015)L09



$\rightsquigarrow$

ランダムウォークの座標 $X(T)$ の確率分布は, T が大きいとき, 母平均値 $T \cdot \mu_{\mathrm{R}}$, 母分散 $T \cdot \sigma_{\mathrm{R}}^2$ の正規分布にほぼ従う.

L02-Q5

Quiz(ランダムウォークと中心極限定理)

$X(t+1) = X(t) + R(t+1), X(0) = 0$ で定まるランダムウォークの座標を考える. ただし, $R(1), R(2), \ldots$ は確率変数で, 母平均値 $\mathrm{E}[R(t)] = -\frac{1}{4}$, 母分散 $\mathrm{V}[R(t)] = \frac{1}{5}$ の独立同分布に従う.

1. $X(20)$ の母平均値と母分散を求めよう.
2. $X(20) > -1$ となる確率を (近似的でよいので紙と鉛筆で) 求めよう.
3. $|X(20)| > 1$ となる確率を (近似的でよいので紙と鉛筆で) 求めよう.

母比率の区間推定

塚田確率統計 §7.3.6　塚田確率統計 §8.5　確率統計☆演習 I(2016)L11

Y=標本中で条件を満たすデータの個数.

母比率の区間推定

母比率の信頼係数 $1-\alpha = 0.95$ の信頼区間は, サンプルサイズ n と標本比率 $\hat{p} = Y/n$ により,

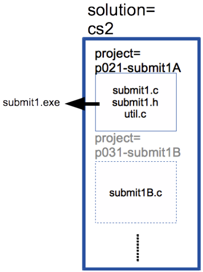
$$\hat{p} - 1.96 \times \sqrt{\frac{1}{n}\hat{p}(1-\hat{p})} < p < \hat{p} + 1.96 \times \sqrt{\frac{1}{n}\hat{p}(1-\hat{p})}.$$

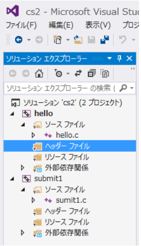
母比率の信頼係数 $1-\alpha = 0.99$ の信頼区間は

$$\hat{p} - 2.58 \times \sqrt{\frac{1}{n}\hat{p}(1-\hat{p})} < p < \hat{p} + 2.58 \times \sqrt{\frac{1}{n}\hat{p}(1-\hat{p})}.$$

IDE, ソリューション, プロジェクト

IDE=Integrated Develpment Environment 統合開発環境
編集, コンパイル, 実行, デバッグを 1 つのアプリケーション内で完結して実行できるようにしたもの．例: Visual Studio, Eclipse, NetBeans.
プロジェクト=1 個の実行ファイル (a.out, *.exe) を作るための，複数のソースファイル (*.c, *.h) をまとめて管理するもの．プロジェクト内に main は 1 個だけ．
ソリューション=複数の関係するプロジェクトをまとめて管理するもの
VS では, 1 個のソリューションを開いた状態で, スタートアッププロジェクトをコンパイル, 実行する．





お知らせ

- 2017-04-19 水 3 実習 $\boxed{\text{教科書・イヤフォン持参}}$
- 2017-04-26 水 3 実習の春のプチテスト
- チューター/Math ラウンジ 月火水木昼 1-614
- 2017-06-18 統計検定