ランダムウォークの確率の漸化式と初期条件

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B　L04(2017-05-08 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2017-05-08 Mon 18:20 JST hig"

今日の目標

- ランダムウォークのルールから, 時刻 t に位置 x にいる確率 $p(x,t)$ の初期条件と漸化式が書ける.
- 初期条件と漸化式から $p(x,t)$ を計算できる.

http://hig3.net

L03-Q1

Quiz 解答:ランダムウォーカーの到達点の座標の母平均・母分散

1. 標本平均値 $\overline{X(3)} = \frac{1}{10}(3+3+\cdots+(-3)) = 1$. よって, 母平均値 $\mathrm{E}[X(3)]$ は 1 と推定できる.
2. 不偏標本分散 $S^2 = \frac{1}{10-1}((3-1)^2+\cdots+(-3-1)^2) = \frac{32}{9}$. よって母分散 $\mathrm{E}[X(3)]$ は $\frac{32}{9}$ と推定できる.
3. 標本期待値 $\overline{X(3)^3} = \frac{1}{10}(3^3+\cdots+(-3)^3) = \frac{29}{5}$. よって母期待値 $\mathrm{E}[X(3)^3]$ は $\frac{29}{5}$ と推定できる.
4. 標本期待値 $\overline{\mathbf{1}_{[X>1]}(X(3))} = \frac{1}{10}(1+1+1+0+\cdots+0) = \frac{3}{10}$. よって母比率 $p = \mathrm{E}[\mathbf{1}_{[X>1]}(X(3))]$ は $\frac{3}{10}$ と推定できる.

L03-Q5

Quiz 解答:rand() の振る舞い　==の左辺の `getrandom` の返す値, 右辺の `getrandom` の返す値は, それぞれ独立な確率変数. よって, 条件文が真となるのは (0,0),(1,1) の和事象で.

$\frac{1}{3}\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\frac{2}{3}=\frac{5}{9}$.

L03-Q6

Quiz 解答:rand() の振る舞い　2 個の `getrandom` の返す値は独立同分布に従う確率変数. よって, $(\frac{4}{13}+\frac{7}{13})\times\frac{7}{13}$.

プログラムの実行の流れにそって何回かの `rand()` が呼び出されます. 条件文 `a()==b()` では, まず左辺, 次に右辺が計算され, 比較されます. そのたびに `rand()` はヘッドの位置の整数を返し, ヘッドを進めます. そのたびに, `getrandom(getuniform())` は指定の確率に従って値を返します (独立同分布). そう考えて, 確率は計算できるはず.

確率は (場合の数)/(すべての場合の数) で計算できるという数学 A のレベルにとどまっていてはいけません. 確率統計☆演習 I では, 確率分布が $f(x)$ で表されることを知りました. いまは $f(x)$ が `getrandom` に内蔵されています.

実習の全体へのフィードバック

プチテスト (プログラミング実技)

- 今回は科目の中身というより, テストへの参加方法がわかってるかを問う+練習するためのテスト
- 間違えた人にメッセージを送ると,
  - イメージトレーニングまたはリハーサルしよう.
  - ファイル名.vcxproj は, プロジェクトに含まれるファイル名を列記しただけのもので, プログラムを含んでいない. ファイル名.c を提出する必要.
  - 上のような間違いは, 面倒でも「拡張子を表示する設定」をすることで確実に防げます.
  - CSV ファイルの保存の指定では, 「`> Q:¥フォルダ名¥ファイル名.csv`」と書いたと思います. Linux での `./a.out > output.txt` と同じ. フォルダは (必要なら自分で作って) 実在するものを指定する必要があります. フォルダ名とソリューション名は別 (にしてもよい). 一方を作ったら他方が自動的にできるようなものではありません.
- これはドラマの初回みたいなもの (5 ピーナッツ). 後半には…

課題 p022-rw18

- 書式を厳密に守ろう
  - 教員のため
  - 日本語解釈の演習, 仕様を明確化する演習
- 繰り返しは, 両端に注意しよう
  - 開始, 終了, 結果として回数.
  - テストのためだけに人為的に極端な開始/終了をセットするとチェックしやすい.

標本期待値は Excel を使わなくても計算できる!

例 $\mathrm{E}[X(10)^3]$ を推定したい.

$$\overline{\phi(X(T))} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\phi(X(T)^{(n)})$$

```
                                          /*1*/
for(n){
                                          /*2*/
  for(t){
                                          /*3*/
    x=x+getrandom(getuniform());
                                        /*4*/
  }
                                          /*5*/
}
                                          /*6*/
```

sum1=0, sum1+=phi(x), printf("%f",(double)sum1/N)?

$\phi \leftrightarrow$ phi(x) は 1,0 を返すものでもよい. sum というより count

パスの標本期待値も計算できる!

例: $X(0), X(1), \ldots, X(T)$ の最大値が 10 以上である母比率を推定したい.

```
int path[TMAX];
                                  /*1*/
for(n){
                                  /*2*/
  for(t){
                                  /*3*/
    x=x+getrandom(getuniform());
    path[t]=x;                              /*4*/
  }
                                  /*5*/
}
                                  /*6*/

int phi(int path[],int tmax){
  ...
  return 0; // or 1
}
```

sum1=0, sum1+=phi(x), printf("%f",(double)sum1/N)?
phi は 1,0 を返すものでもよい. sum というより count.

ここまで来たよ

3 離散座標ランダムウォークの座標の確率・母平均値・母分散

4 ランダムウォークの確率の漸化式と初期条件

- $p(x,t)$ の漸化式
- $p(x,t)$ の初期条件
- 初期値・漸化式の適用

R が二項分布にしたがうときの計算

計算科学☆実習 B(2017)L02

L04-Q1

Quiz(ランダムウォークの確率と座標の期待値)

離散ランダムウォークで, $X(0) = x_0 = 0$, $X(t+1) = X(t) + R(t+1)$,

$$P(R(t) = r) = \begin{cases} p & (r = 1) \\ 1 - p & (r = 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

のとき,

1. $P(X(3) = x)$ を求めよう ($x = 0, 1, \ldots$ は整数).
2. $\mathrm{E}[X(3)]$ を求めよう.
3. $\mathrm{V}[X(3)]$ を求めよう.
4. $X(3) > 1$ となる確率を求めよう.

もし R が二項分布にしたがわなかったら?

(R が二項分布じゃなくても) 確率や母期待値を厳密に手計算する

ランダムウォーカーの時刻 t の座標 $X(t)$ は漸化式

$$X(t+1) = X(t) + R(t+1), \quad X(a) = b.$$

に従う. $R(t)$ $(t = 1, 2, \ldots, T)$ は独立同分布に従う確率変数.

$p(x,t)$ の定義

時刻 t に, ウォーカーが x にいる確率 $p(x,t) = P(X(t) = x)$.

性質 $\forall t \quad \displaystyle\sum_{x=-\infty}^{+\infty} p(x,t) = 1$

$p(x,t)$ の漸化式

具体例で

「ランダムウォーカーが時刻 t に x にいるとき, 時刻 $t+1$ には, 確率 p で $x+1$ に移動し, 確率 $q=1-p$ で x にとどまる.

$\Downarrow$

$X(t+1) = X(t) + R(t+1)$

R	確率
0	$q = 1-p$
$+1$	p

確率微分方程式的描像, ランジュバン方程式的描像

$\Downarrow$

確率 (合計 1) だけど, x 軸上に合計 $N = 1000$ 人いるかのように考えよう.
時刻 t に x にいる $N \times p(x,t)$ 人のうち, 時刻 $t+1$ には, 平均的には

- x から $x+1$ に去るのは, $N \times p(x,t) \times p$ 人
- x から移動せず x にとどまるのは $N \times p(x,t) \times q$ 人

$X(t)$ の漸化式から $p(x,t)$ の漸化式を導きたい

逆に考えると, 時刻 $t+1$ に,

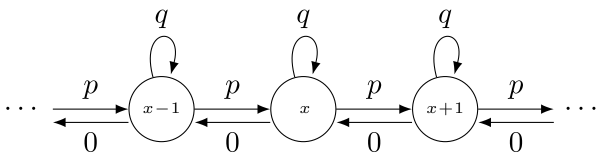
- $x-1$ から, x に来るのは, $\boxed{}$ 人
- x から移動せず x にいるのは, $\boxed{}$ 人

これが, $t+1$ に x にいる人すべて $N \times p(x, t+1)$.

$$\boxed{}$$

両辺のどこにも, 確率変数はなくなった!(確率はあるけど)

拡散方程式的描像, マスター方程式的描像, フォッカープランク方程式的描像



計算で

条件付き確率　確率統計☆演習 II(2017)L01

$$
\begin{aligned}
P(X(t+1)=x) =& \sum_{y} P(X(t+1)=x|X(t)=y)P(X(t)=y) \\
=& \cdots + 0 \\
& + P(X(t+1)=x|X(t)=x-1)P(X(t)=x-1) \\
& + P(X(t+1)=x|X(t)=x)P(X(t)=x) + 0 + \cdots \\
=& P(R(t+1)=1)P(X(t)=x-1) \\
& + P(R(t+1)=0)P(X(t)=x)
\end{aligned}
$$

L04-Q2

Quiz(離散的なランダムウォークの確率の漸化式)

時間 t, 座標 x が整数値のみをとるようなランダムウォークを考える.
時刻 $t=5$ に $x=2$ を出発し, 各時刻 t に,

確率 $\frac{1}{7}$ で $+2$ だけ移動
確率 $\frac{4}{7}$ で -1 だけ移動
確率 $\frac{2}{7}$ で 0 だけ移動 (移動しない)

する.
時刻 t にランダムウォーカーが座標 x にいる確率 $p(x,t)$ の漸化式と初期条件を求めよう.

L04-Q3

Quiz(離散的なランダムウォークの確率の漸化式)

時間 t, 座標 x が整数値のみをとるようなランダムウォークを考える.
時刻 $t=3$ に $x=2$ を出発し, 各時刻 t に,

確率 $\frac{1}{8}$ で x から $x+1$ に移動
確率 $\frac{3}{8}$ で x から $x-2$ に移動
確率 $\frac{4}{8}$ で x にとどまる

ものとする.
時刻 t にランダムウォーカーが座標 x にいる確率 $p(x,t)$ の (t に関する) 漸化式と初期条件を求めよう.

ここまで来たよ

3 離散座標ランダムウォークの座標の確率・母平均値・母分散

4 ランダムウォークの確率の漸化式と初期条件
- $p(x,t)$ の漸化式
- $p(x,t)$ の初期条件
- 初期値・漸化式の適用

$p(x,t)$ の初期条件

運動の初期条件 $\Leftrightarrow$ 数列の初項

具体例で

「ランダムウォーカーが時刻 $t=2$ に $x=3$ から出発した」

$\Downarrow$

$\boxed{}$

$X(t)$ の初期条件から $p(x,t)$ の初期条件を導きたい.

例 1

$t = 2$ には $x = 3$ にいる →

$X(2)$	$\cdots$	2	3	4	$\cdots$
確率	0	0	1	0	0

→ $p(x,2) =$

例 2

$t = 1$ には $x = 0, 9$ に各 $\frac{1}{2}$ の確率でいる →

$X(1)$	$\cdots$	0	$\cdots$	9	$\cdots$
確率	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0

→ $p(x,1) =$

ここまで来たよ

3 離散座標ランダムウォークの座標の確率・母平均値・母分散

4 ランダムウォークの確率の漸化式と初期条件

- $p(x,t)$ の漸化式
- $p(x,t)$ の初期条件
- 初期値・漸化式の適用

$p(x,t)$ を表で表現 I

$t\backslash x$	$\cdots$	0	$\cdots$	$x-1$	x	$x+1$	$\cdots$
$\vdots$ t $t+1$ $\vdots$			$\cdots$	$p(x-1,t)$ $p(x-1,t+1)$	$p(x,t)$ $p(x,t+1)$	$p(x+1,t)$ $p(x+1,t+1)$	$\cdots$

漸化式と初期条件から $p(x,t)$ を計算

$$p(x,t+1) = \frac{2}{3}p(x-1,t) + \frac{1}{3}p(x,t), \quad p(x,0) = \begin{cases} 1 & (x=0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

空いてるマスをうめよう.

$t \backslash x$	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$	x	$\cdots$
0	$\cdots$								$\cdots$		$\cdots$
1									$\cdots$		$\cdots$
2									$\cdots$		$\cdots$
3									$\cdots$		$\cdots$
$\vdots$											
t										$p(x,t)$	
$\vdots$											

上の行から埋めていく.

$p(1,1)$ を埋めるには, 漸化式で $x=1, t+1=1$ とおく

L04-Q4

Quiz(2 項係数の漸化式)

次のランダムウォークの確率の漸化式を考える.

$$p(x,t+1)=\begin{cases}\frac{1}{5}p(x-1,t)+\frac{4}{5}p(x+1,t) & (\text{それ以外})\\ 0 & (x<-1, x>6)\end{cases},$$

$$p(x,0)=\begin{cases}0.5 & (x=1,3)\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

下のような $p(x,t)$ の表を, 漸化式を適用して埋めよう.

$t\backslash x$	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+5$	$+6$	$+7$
0										
1										
2										

L04-Q5

Quiz(二項係数の漸化式)

二項係数 ${}_t\mathrm{C}_x$ を考える.
二項係数は漸化式

$$ {}_{t+1}\mathrm{C}_x = {}_t\mathrm{C}_{x-1} + {}_t\mathrm{C}_x $$

を満たす ($t = 0, 1, 2, \cdots$, x は整数).
また, 次が成立する.

$$ {}_0\mathrm{C}_x = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases} $$

1. 上の漸化式と初期条件だけを使って, 縦に $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, 横に $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ の表に 2 項係数 ${}_t\mathrm{C}_x$ をうめよう.
2. ${}_t\mathrm{C}_x$ の場合の数としての意味から, 漸化式が成立することを直観的に説明しよう.

お知らせ

- チューター/Math ラウンジ 月火水木昼 1-614
- 2017-05-08 月 統計検定申込締切
- 2017-06-18 統計検定

- 次回の実習からサブチーム=ペアで．事前にメールでサブチーム番号とシナリオ番号お送りします．
- Visual Studio 自宅インストールおすすめ中．計算科学☆実習のページ > ガイドから．