オイラー表現とラグランジュ表現・現象のモデリング

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B L10(2017-06-26 Mon)

最終更新: Time-stamp: "2017-06-26 Mon 17:26 JST hig"

今日の目標

- 母ナントカと標本ナントカ, ラグランジュ表現とオイラー表現を対照して説明できる
- ペンギンの群れの分布をラグランジュ/オイラー表現できる
- 現象をランダムウォークでモデル化できる

http://hig3.net

L09-Q1

Quiz 解答:逆変換法　r の累積密度関数は, $0 \le r < 2$ に対して $F(r) = \int_{-\infty}^{r} f_R(r')\,\mathrm{d}r' = \int_0^r \frac{1}{2} r'\,\mathrm{d}r' = \frac{1}{4} r^2$.
$0 \le y < 1, 0 \le r < 2$ で $y = \frac{1}{4} r^2$ を解くと, $r = g(y) = 2\sqrt{y}$.
$\pm 2\sqrt{y}$ とした人がいたけどご注意. プログラムはどっちでもいいの?
根拠なく $+2\sqrt{y}$ としていた人がいたけどご注意. $-$ を選ばなきゃいけないときもあるよ.
いまは, 定義域 $[0, 2)$, 値域 $[0, 1)$ の増加関数 $F(r)$ の逆関数 (この状況では逆関数は存在し, ひとつだけ) である $g(y)$ を探してたから, 定義域 $[0, 1)$, 値域 $[0, 2)$ のものを選ぶんだよね.

L09-Q2

Quiz 解答:$[a, b)$ 一様乱数の生成

```
double getrandom(double y){
  double s;
  s=5.0*y-3.0;
  return s;
}
```

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (r < -3) \\ \frac{1}{5}(r+3) & (-3 \leq r < 2) \\ 1 & (2 < r) \end{cases}$$

L09-Q3

Quiz 解答:2 人ウォーカーのサンプルパスの測定

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_1	0	1	0	-1	-2	-3	-2	-1	0	-1
x_2	10	9	8	7	8	7	6	7	6	7

1. $t = 8$
2. $x_1 - x_2 = 6$
3. $1 \ (t = 8)$

ここまで来たよ

実習課題の振り返り:2 つのタイプがあった!

- マルコフ連鎖の数値計算
  - markov, ...
  - 母ナントカ: 厳密. 確率の式を 1 回だけ計算. $p(x,t)$ は確率

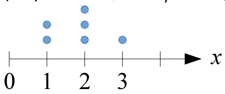
    フォッカー-プランク, マスター方程式, 拡散方程式, 熱方程式
  - オイラー表現: 場所ごとに確率をカウント
- 確率シミュレーション
  - rw, sim, ...
  - 標本ナントカ: 標本サイズだけ乱数で実行を繰りかえして, 標本から推定. $X(t)$ は座標

    ランジュバン方程式

    ランダムウォーク
  - ラグランジュ表現:ウォーカーごとに座標をカウント

ラグランジュ表現

確率は忘れて, ウォーカーが大勢いる状況をラグランジュ表現しよう.



数式的

$x^{(k)}(t)$: ウォーカー番号 k 番の, 時刻 t の座標.
上の状況なら
$x^{(0)}(t)=1, x^{(1)}(t)=2, x^{(2)}(t)=2, x^{(3)}(t)=3, x^{(4)}(t)=1, x^{(5)}(t)=2.$

C 的

`x[k]` ウォーカー番号 k 番の座標 (時刻 t とともに, この変数を更新)

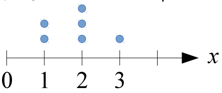
```
int x[6]; /*配列の宣言*/
```

または,

```
int x[]={1,2,2,3,1,2}; /*配列の宣言兼代入*/
```

オイラー表現

確率は忘れて, ウォーカーが大勢いる状況をオイラー表現しよう.



数式的

$P(x,t)$: 時刻 t に, 座標 x にいるウォーカーの人数.
上の状況なら
$P(0,t)=0, P(1,t)=2, P(2,t)=3, P(3,t)=1, P(他,t)=0.$

C 的

`P[x]` 座標 x にいるウォーカーの人数 (時刻 t とともに更新)
`int P[100];` /*配列の宣言. $100-1=x$ 座標の上限*/
または
`int P[]={0,2,3,1,0,0,...};` /*配列の宣言兼代入*/
マルコフ連鎖の計算で使ってる `double p[]` は「いわば」 $p=P/N$, $N=6$ がウォーカーの合計人数.

L10-Q1

Quiz(ラグランジュ表現とオイラー表現)

(座標が整数値のみをとる離散型の) ランダムウォークを考える.
6 羽のペンギンが, 座標 $x = 0, 1, 2, \ldots, 9$ の範囲をランダムウォークする.
ある時刻 t に, $x = 1$ に 2 羽, $x = 3$ に 3 羽, $x = 8$ に 1 羽いるとする.

1. ラグランジュ表現を用いたとき, 配列 `x[]` のサイズはどれだけ必要か. また, 時刻 t に配列の各要素はどのような値をとるか.
2. オイラー表現を用いたとき, 配列 `P[]` のサイズはどれだけ必要か. また, 時刻 t に配列の各要素はどのような値をとるか.

配列のサイズとは, 元の型の変数を何個集めたかという個数. `int x[SIZE];` の `SIZE`.

ラグランジュ表現とオイラー表現によるプログラムの比較

	ラグランジュ表現	オイラー表現
空間	なんでも	有限個の場所
ウォーカーの区別	あり	なし
得意な問		
シューティング ブロック崩し テトリス ランダムウォーク		

L10-Q2

Quiz(オイラー表現とラグランジュ表現)

次のゲームのオブジェクトのうち, オイラー表現に適したもの (=ラグランジュ表現に適していないもの) を答えよう.

1. シューティングの自機
2. シューティングのミサイル
3. シューティングの雑魚キャラ
4. シューティングのラスボス
5. ブロック崩しのボール
6. ブロック崩しのラケット
7. ブロック崩しのブロック
8. テトリスの落下前のブロック
9. テトリスの落下後のブロック

L10-Q3

Quiz(ラグランジュ表現)

ランダムウォークのラグランジュ表現で, 時刻 t におけるウォーカーの座標 $X(t)$ の標本が配列 `x[SAMPLESIZE]` に格納されているとする.

```
#define SAMPLESIZE 6
double x[SAMPLESIZE];
```

1. 標本平均値 $\overline{X}$ を計算して `double ex;` に代入するプログラム (の一部) を書こう.
2. $X(t) \leq 5$ の標本比率を計算して `double px;` に代入するプログラム (の一部) を書こう.

両者を同時に計算する 1 個のプログラム (の一部) でもよい.

L10-Q4

Quiz(オイラー表現)

ランダムウォークのオイラー表現, または, マルコフ連鎖の数値解法のプログラムで, 時刻 t において ウォーカーの座標が $X(t) = x$ である確率 $p(x,t)$ が, すでに計算され, 配列 `p[x]` に格納されているとする. ただし, $x = 0, 1, \ldots, 19$.

```
#define XMAX 20
double p[XMAX];
```

1. 母平均値 $\mathrm{E}[X(t)]$ を計算して `double ex;` に代入するプログラム (の一部) を書こう.
2. 母比率 $P(X(t) \leq 5)$ を計算して `double px;` に代入するプログラム (の一部) を書こう.

両者を同時に計算する 1 個のプログラム (の一部) でもよい.

ここまで来たよ

9 逆関数法による連続型擬似乱数生成

10 オイラー表現とラグランジュ表現・現象のモデリング
- オイラー表現とラグランジュ表現
- ランダムウォークによるモデリング
- 中心極限定理を利用したランダムウォークの解析

連続座標のランダムウォーク

$$\text{漸化式 } X(t+1) = X(t) + R(t+1)$$

$$\text{初期条件 } X(t_0) = X_0$$

時間離散 $t \in \mathbb{Z}$: 時刻
空間連続 $X(t), x \in \mathbb{R}$: 座標
$R(t) \in \mathbb{R}$ は座標の変化量．独立同分布にしたがう連続型確率変数 $\to$ 確率密度関数 $f_{\mathrm{R}}(r)$ で記述される．
$\rightsquigarrow$ $X(t)$ も連続型確率変数．確率密度関数 $f_{\mathrm{X}}(x)$ で記述．

ラグランジュ表現での有限空間の離散/連続座標ランダムウォーク

- 離散座標のとき, 整数全体 $x \in \mathbb{Z}$
- 連続座標のとき, 実数全体 $x \in \mathbb{R}$

のランダムウォークを考えていた. 有限空間

- 離散座標のとき, 整数 $x = 0, 1, 2, \ldots, m-1$
- 連続座標のとき, 実数の区間 $x \in [0, L]$

に制限して考えることもできる. $\rightarrow$ 境界条件

壁 $x = 0$ の境界条件を考える. $X(t) + R(t+1) \leq 0$ となったときの処理.

吸収壁境界条件 $X(t+1) = \boxed{}$ そのウォーカーはそれ以上動かさない.

反射壁境界条件 $X(t+1) = \boxed{}$.

周期的境界条件 $X(t+1) = \boxed{}$.

応用:ギャンブラー破産問題とランダムウォーク

10 万円を元手にギャンブルする．毎回 1 万円をかける．0 万円から 10 万円が, ある確率で返ってくる．ギャンブル 100 回のうちに破産する確率は?(20 万円に到達する確率は?)

ランダムウォークで言うと

応用:2 次元ランダムウォークとパターン形成 DLA モデル

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lichtenberg_figure_in_block_of_Plexiglas.jpg
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:DLA_Cluster.JPG

2 次元ランダムウォーク

1 次元ランダムウォーク

```
x=0;
for(t){
  x+=getrandom(getuniform());
}
```

離散座標の場合に getrandom をばらして書くと

```
x=0;
for(t){
  z=getuniform(); /*[0,1)一様乱数． y座標と区別*/
  if(z<0.5){
    x+=1;
  } else {
    x-=1;
  }
}
```

2 次元ランダムウォーク

1 次元ランダムウォーク	x 軸上をランダムに移動	$X(t)$
2 次元ランダムウォーク	xy 平面上をランダムに移動	$(X(t), Y(t))$

離散座標

```
x=0;y=0;
for(t){
  z=getuniform();
  if(z<0.25){
    x+=1;
  } else if(z<0.5)
    x-=1;
  } else if(z<0.75)
    y+=1;
  } else {
    y-=1;
  }
}
```

連続座標．移動距離もランダムにしてもいい．

```
x=0.0;y=0.0;
for(t){
  z=getuniform();
  x+=cos(2*M_PI*z);
  y+=sin(2*M_PI*z);
}
```

DLA=Diffusion Limit Aggregation 拡散律速凝集のルール

- 原点に「枝の種」=吸収壁を置く
- 粒子をどこかに置いてランダムウォーク．粒子が枝に接触したらウォーク終了 (吸収壁)
  粒子は枝に固着する $\rightsquigarrow$ 吸収壁が成長
- 粒子をどこかに再度おいてランダムウォーク

1 次元と 2 次元の中間の図形　　応用数理 A

https://www.youtube.com/watch?v=uBy3Uouy76Q

https://www.youtube.com/watch?v=Y6F86ryRTGs

	テトリス	DLA
オイラー表現	積み上がるブロック	枝
ラグランジュ表現	落ち中のブロック	ランダムウォーカー
	横ランダム, 縦等速直線運動	縦横ランダム
	4 ブロック, 回転あり	1 ブロック, 回転なし

応用:B 湖の水位のランダムな増減 I

L10-Q5

Quiz(確率シミュレーションと中心極限定理)

B 湖の毎日の水位の変化 R は, 毎日独立に, -1 cm 以上 2cm の範囲でランダムに定まり, どの値も同様に確からしい. 0 日に水位は 100cm だった.

1. 30 日の水位はどんな分布?
2. 30 日の水位が 120cm 以上 125cm 未満である確率を求めよう.

ただし, 標準正規分布の累積分布関数 $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{z} \mathrm{e}^{-u^2/2}\mathrm{d}u$ を使って答えてよい. 計算機でシミュレーションして答えてもよい.

二項分布の正規近似 高校 数学 B 塚田確率統計 §5.3.1 の進化形

次のうちどれは式で求められる? どれは確率シミュレーションで求められる?

1. 10 日目から 20 日目までの水位の増分の母平均値
2. 0 日から 30 日目までずっと 120cm を越えない母比率
3. (15 日目の水位)^3 の母平均値
4. 120cm を越えない日数の母平均値
5. 30 日間の最大水位の母平均値

「何でも」確率シミュレーションで推定できる

ここまで来たよ

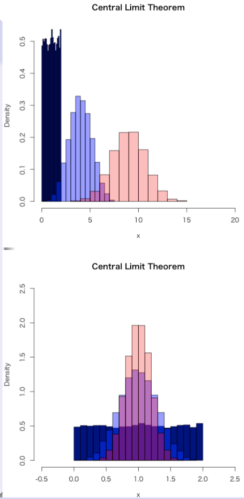
復習:中心極限定理 塚田確率統計 §5.3

1 個 1 個が一様分布でも $t \to \infty$ で $X(t) = U_t$ や W_t の確率密度関数の形は長方形から崩れていく．分布の個性が消える! っていうか美しい形に!

中心極限定理 (いいかげんバージョン)

$R(1), \ldots, R(t)$ が母平均値 μ, 母分散 σ^2 の独立同分布に従うとき,

- $U_t = X(t) = R(1) + \cdots + R(t)$, の確率分布は，の $\boxed{}$ に似る
- $W_t = \frac{1}{t}(R(1) + \cdots + R(t))$ の確率分布は, $\boxed{}$ に似る
- $Z_t = \frac{W_t - \mu}{\sigma\sqrt{t}}$ の確率分布は, $\boxed{}$ に似る

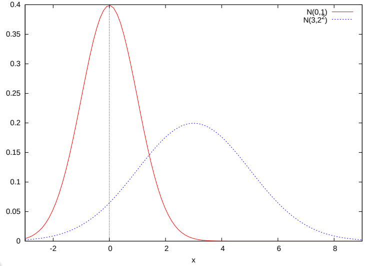


復習:正規分布 塚田確率統計 §4.7

標準正規分布の確率密度関数

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}$$

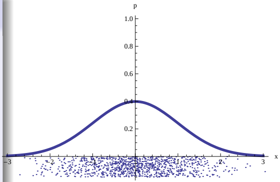
$X = aZ + b = \sigma a + \mu$ を考える.
X の確率密度関数は, z のところに $z = \frac{x-b}{a} = \frac{x-\mu}{\sigma}$ を代入すればいいので,



正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ の確率密度関数

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

パラメタ μ(= 実は $\mathrm{E}[X]$),
σ^2(= 実は $\mathrm{V}[X]$).



お知らせ

- 樋口オフィスアワー 月 6, 金 4.5(1-502)
- チューター/Math ラウンジ 月火水木昼 1-614

計算科学の今後の予定

最大の 2 個の和 (初夏のプチテスト 15, 夏のプチテスト 15, プレゼンテーション 15)
→ 初夏のプチテスト 15+プレゼンテーション 15+プレゼンテーション 15

- 2017-06-28 水 4 実習
- 2017-07-03 月 4 講義
- 2017-07-05 水 3 説明+プレゼンテーション準備
- 2017-07-10 月 4 説明+プレゼンテーション準備 (3-B105)
- 2017-07-12 水 3 プレゼンテーション 1 15 ピーナッツ (小教室)
- 2017-07-17 月 4 説明+プレゼンテーション準備 (3-B105)
- 2017-07-19 水 3 振り返り+プレゼンテーション準備 (3-B105)
- 2017-07-24 月 集中補講日 計算科学なし
- 2017-07-26 水 3 プレゼンテーション 2 15 ピーナッツ (小教室)
- 2017-07-31 月 4 ファイナルトライアル (筆記) 25 ピーナッツ
- 2017-08-02 水 3 演習の時間はファイナルトライアルなし