ランダムウォークの座標の推定

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B L02(2018-04-17 Tue)

最終更新: Time-stamp: "2018-04-17 Tue 15:49 JST hig"

今日の目標

- 擬似乱数列で標本抽出するプログラムを書ける
- 標本ナントカから母ナントカを点推定, 区間推定できる

http://hig3.net

L01-Q1
Quiz 解答:連続的な確率変数の母平均値・母分散・母標準偏差・確率 (一様分布)

1. $\mathrm{E}[\cos(\pi X)] = \int_{5/2}^{3} 2\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x = [\frac{2}{\pi}\sin(\pi x)]_{5/2}^{3} = -\frac{2}{\pi}$
2. $P(\frac{22}{8} < X < \frac{23}{8}) = \mathrm{E}[\mathbf{1}_{[\frac{22}{8}<X<\frac{23}{8}]}(X)] = \int_{22/8}^{23/8} 2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$

L01-Q2
Quiz 解答:擬似乱数の使いかた

ソースコード 1: 乱数

```
double getrandom(double y){
  if(y<0.3){
    return 0.4;
  }
  return 0.6;
}
```

L01-Q3

Quiz 解答:離散的な乱数の生成

```
int getrandom(double y){
  if(y<2.0/8.0){
    return 1;
  } else if (y<(2.0+1.0)/8.0){
    return 2;
  } else {
    return 3;
  }
}
```

L01-Q4

Quiz 解答:期待値

```
int getrandom(double y){
  if(y<2/13.0){
    return 0;
  } else if (y<(2+4)/13.0){
    return 3;
  } else {
    return 4;
  }
}
```

値 $R = 3$ が返される確率の検算.
$P(R = 3) = P(Y < 2/13$ でない かつ $Y < 6/13) = P(2/13 \leq Y < 6/13) = \int_{2/13}^{6/13} 1 \, \mathrm{d}y =$
$4/13$.

ここまで来たよ

1. ランダムウォークと離散型確率分布にしたがう擬似乱数

2. ランダムウォークの座標の推定
   - 標本からの推定
   - 確率シミュレーション
   - 擬似乱数列生成の仕組みとシード
   - ランダムウォークの確率シミュレーション

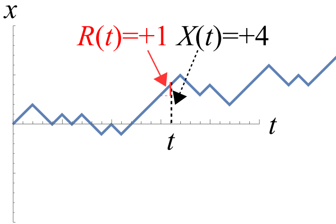
ランダムウォークの座標の母期待値，母比率は?

乱数 $R(t)$ やランダムウォークの座標 $X(1000)$ は確率変数.

ありうる問

(手計算で) 以下の母ナントカを厳密に求めよう.

- 母平均値 $\mathrm{E}[R(t)]$, 母期待値 $\mathrm{E}[\mathrm{e}^{R(t)}]$, 母比率 $P(R(t) > 1)$
- 母平均値 $\mathrm{E}[X(1000)]$, 母期待値 $\mathrm{E}[\mathrm{e}^{X(1000)}]$, 母比率 $P(X(1000) > 1)$
- 母比率 $P(X(50) = 12$ かつ $X(100) = 25)$



別のタイプの問

確率分布 $f(x)$ の式を知らない (例:誰かが作った getrandom の中身不明) けど，データ (標本) だけはあるとする. 母ナントカを推定したい.

点推定

母平均値の推定 西川確率統計 §6.3 確率統計☆演習 I(2017)L10

$$\text{標本平均値}\ \overline{X} = \frac{1}{N}(X^{(1)} + \cdots + X^{(N)}) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X^{(n)}$$

が, 母平均値 $\mathrm{E}[X]$ の ‘よい’ 推定値になっている.

母分散の推定 西川確率統計 §6.3 確率統計☆演習 I(2017)L10

$$\begin{aligned}\text{不偏標本分散}\ S^2 &= \frac{1}{N-1}[(X^{(1)} - \overline{X})^2 + \cdots + (X^{(N)} - \overline{X})^2] \\ &= \frac{N}{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{n}(X^{(n)})^2 - (\overline{X})^2\right]\end{aligned}$$

が, 母分散 $\mathrm{V}[X]$ の ‘よい’ 推定値になっている.

母期待値の推定 西川確率統計 §6.3 確率統計☆演習 I(2017)L10

$$\text{標本期待値 } \overline{\phi(X)} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\phi(X^{(n)})$$

が 母期待値 $\mathrm{E}[\phi(X)]$ の ‘よい’ 推定値になっている.

理由: 確率変数 $Y = \phi(X)$ の母平均値の推定と同じこと.

母比率の推定 西川確率統計 §8.4 確率統計☆演習 I(2017)L10

X のサンプルのデータ N 個中 k 個が「条件…を満たす」とき,

$$\text{標本比率} \hat{p} = \frac{k}{N}$$

が母比率 $P(\text{「条件…」}) = \mathrm{E}[\mathbf{1}_{[\dots]}(X)]$ の ‘よい’ 推定値になっている.

理由 $\phi(X) = \mathbf{1}_{[\dots]}(X)$ と思えば, $Y = \phi(X)$ はベルヌーイ分布 $\mathrm{B}(1, p)$ にしたがう.

L02-Q1

Quiz(ランダムウォーカーの到達点の座標の母平均・母分散)

仕組みのよくわからないランダムウォークで標本抽出したところ,
$X(3)^{(n)} \quad n = 1, 2, \cdots, 10$ が

$$3, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 1, -1, -3$$

だった.

1. 母平均値 $\mathrm{E}[X(3)]$ を点推定しよう.
2. 母分散 $\mathrm{V}[X(3)]$ を点推定しよう.
3. 母期待値 $\mathrm{E}[X(3)^3]$ を点推定しよう.
4. 母比率 $P(X(3) > 1)$ を点推定しよう.

ここまで来たよ

1. ランダムウォークと離散型確率分布にしたがう擬似乱数
2. ランダムウォークの座標の推定
   - 標本からの推定
   - 確率シミュレーション
   - 擬似乱数列生成の仕組みとシード
   - ランダムウォークの確率シミュレーション

確率シミュレーション

対比される計算方法 (いま使わない)

$\mathrm{E}[X] = \sum_{x=1}^{3} x f(x)$ のような母ナントカの公式をプログラムで計算する.

$f(x)$ が求まったら苦労しないよ

最終的な誤差=$\boxed{\text{数値計算誤差}}$

確率シミュレーション

確率的現象を, 擬似乱数を使ってそのままコンピュータ上で再現し (simulate), 繰り返して実行して標本抽出して, 母ナントカを推定すること.

- いつでも推定はできちゃう
- 要 $\boxed{}$

最終的な誤差=$\boxed{\boxed{\text{統計誤差}}}$+$\boxed{\text{数値計算誤差}}$

確率変数 $R(1)$ の標本

$R(1)^{(n)}$

$t = 1$: $\boxed{}$

(n): $\boxed{}$

	$t = 1$
$n = 1$	$X(1)^{(1)}$, 改行
$n = 2$	$X(1)^{(2)}$, 改行
$\vdots$	$\vdots$
$n = N$	$X(1)^{(N)}$, 改行

ソースコード 2: 擬似乱数

```
/*
rand1.c -- -1 or +1 を確率1/4, 3/4で選ぶ乱数
Time-stamp: "2018-04-17 Tue 19:18 JST hig"
*/
#define _CRT_SECURE_NO_WARNINGS // Visual C++用おまじない
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>    /* srand(), rand() を使うのに必要 */

/* 関数プロトタイプ宣言 */
int getuniform();
int getrandom(double y);

int main(){
  int seed;         /* 疑似乱数のシード */
  int n;            /* カウンタ 標本内通し番号*/
  int nmax=100;     /* 疑似乱数を得る回数=サンプルサイズN */

  scanf("%d",&seed);
  srand(seed);          /* シードの設定 */
  for(n=0;n<nmax;t++){ /* 数式とnは1ずれてる*/
    /* srand(seed);  */ /*ここに置くと? */
    printf("%d,%d\n",getrandom(getuniform());
  }
  return 0;
}
/** [0,1) 一様疑似乱数を返す */
double getuniform(){
  return rand()/(RAND_MAX+1.0);
}
/** -1 or +1 を確率1/4, 3/4 で返す乱数 */
int getrandom(double y){
  if( y < 0.25 ){
    return -1;
  } else {
    return +1;
  }
}
```

ここまで来たよ

1. ランダムウォークと離散型確率分布にしたがう擬似乱数
2. ランダムウォークの座標の推定
   - 標本からの推定
   - 確率シミュレーション
   - 擬似乱数列生成の仕組みとシード
   - ランダムウォークの確率シミュレーション

計算機の頭の中どうなってんの?

擬似乱数列＝‘ほぼ’ ランダムな数列

2 回続けて `int rand()` を呼んで得られる 2 個の数の分布は独立であるかのように考えてる (けど… そこが擬似).

(標本抽出のたびに別々の)seed を指定することが必要

- seed に応じて, 毎回異なる乱数列が得られる.
- 特定の乱数列に対する動作を再現できる. デバッグでは必須.
- seed を適切に設定すると, 複数回の実行で, 別々の (独立な) 標本抽出が行える.

L02-Q2

Quiz(rand() の振る舞い)

次のプログラムで, seed を無作為に入力するとき, A が出力される確率は?

```c
int getrandom(double y){
  if( y<1/3.0 ){
    return 0;
  }else{
    return 1;
  }
}

int main(){
  int seed;
  scanf("%d",&seed);
  srand(seed);
  if( getrandom(getuniform())==getrandom(getuniform()) ){
    printf("A\n");
  }
  return 0;
}
```

1. 0
2. $1/2$
3. $5/9$ に近い
4. $6/9$ くらい
5. 1

ここまで来たよ

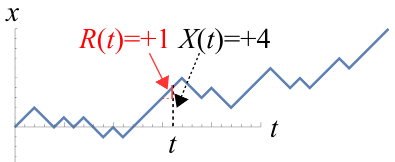
ランダムウォークの座標 $X(t)$ の標本

$X(t)^{(n)}$

t:

(n):

	$t=0$	$t=1$	$\cdots$	$t=T$
$n=1$	$X(0)^{(1)}$,	$X(1)^{(1)}$,	$\cdots$	$X(T)^{(1)}$, 改行
$n=2$	$X(0)^{(2)}$,	$X(1)^{(2)}$,	$\cdots$	$X(T)^{(2)}$, 改行
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n=N$	$X(0)^{(N)}$,	$X(1)^{(N)}$,	$\cdots$	$X(T)^{(N)}$, 改行



$X(0), X(1), X(2), \ldots, X(T)$ の標本を抽出するプログラム

```
                                        /*1*/
for(n=0;n<N;n++){
                                        /*2*/

  for(t=1;t<=T;t++){
                                        /*3*/
    x=x+getrandom(getuniform());
                                        /*4*/
  }
                                        /*5*/
}
                                        /*6*/
```

問: `srand(seed)`, `x=0`, `t=0` `printf("%d,",x)` はどこ?
問: 他に何がいる?

標本期待値の C による計算

$$\overline{\phi(X(T))} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \phi(X(T)^{(n)})$$

```
                                  /*1*/
for(n){
                                  /*2*/
    for(t){
                                  /*3*/
        x=x+getrandom(getuniform());
                                 /*4*/
    }
                                  /*5*/
}
                                  /*6*/
```

sum1=0, sum1+=phi(x) (例 $\phi(x) = x^3$), printf("%f",(double)sum1/N)?

標本比率の C による計算

$\phi(x) = \mathbf{1}_{[\text{条件}]}(x)$ に相当する `phi` は?

sum1 は $\boxed{}$ と名付けたほうがいいかも.

L02-Q3

Quiz(rand() の振る舞い)

$t = 2$ に $x = 10$ から出発したランダムウォーカーが, $t = 20$ で, 領域 $x < 0$ にいる確率を推定して出力するプログラムを書こう. ただし,

$$X(t) = X(t-1) + R(t)$$

で, `int getrandom(getuniform())` が独立同分布にしたがう確率変数 $R(t)$ を返すものとする. main と phi の中だけ書こう.

ランダムウォークの言葉づかいの習慣

$X(2)$: 初期条件, ランダムウォーカーの出発点 (を確率変数とみたもの)

- 「ランダムウォーカーが時刻 $t = 2$ に $x = 3$ から出発した」⇔
- 「$t = 20$ で $x < 0$ にいる」⇔

L02-Q4

Quiz(rand() の振る舞い)

seed を与えられると, $t = 3$ に $x = 4$ から出発したランダムウォークが, $T = 10$ で $|X(T)| < 5$ である確率を推定して出力するプログラムを書こう. ただし,

$$X(t) = X(t-1) + R(t),$$

で, 独立同分布にしたがう確率変数 $R(t)$ を, `int getrandom(getuniform())` が返すものとして, main と phi の中だけ書こう.

お知らせ
Quiz の提出はスマホで撮って Learn Math Moodle へ.
`https://learn.math.ryukoku.ac.jp/moodle`

- 2018-04-20 金 3 実習 教科書・イヤフォン持参
- 2018-04-27 金 3 実習の春のプチテスト
- チューター/Math ラウンジ 月火水木昼 1-614
- 2018-06-17 統計検定の瀬田学舎団体受験