マルコフ連鎖の時間発展

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B L05(2018-05-08 Tue)

最終更新: Time-stamp: "2018-05-08 Tue 18:55 JST hig"

今日の目標

- マルコフ連鎖の時間発展を求められる
- マルコフ連鎖の極限分布の有無, 収束の様子を説明できる
- マルコフ連鎖の状態に関する, 母期待値, 母比率を計算できる

http://hig3.net

L04-Q1 遷移図省略.

Quiz 解答:マルコフ連鎖の推移確率行列

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}$$

L04-Q2 遷移図省略.

Quiz 解答:マルコフ連鎖の推移確率行列

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & 0 & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

L04-Q3

1. 転置推移確率行列 M の固有値 $\lambda_1 = 1$ の固有ベクトル $\vec{u}_1$ を (あるなら) 求めればよい. $M\vec{u}_1 = \vec{u}_1$ を解いて, $\vec{u}_1 = \binom{3}{4} s \quad (s \neq 0)$. 定常分布は, 規格化された $\vec{u}_1 = \frac{1}{7}\binom{3}{4}$.
2. $\vec{p}(1) = M\vec{p}(0) = \frac{1}{3}\binom{1}{2}$.

ここまで来たよ

4 マルコフ連鎖

5 マルコフ連鎖の時間発展

- マルコフ連鎖の時間発展
- 一般の場合のマルコフ連鎖の時間発展
- マルコフ連鎖の時間発展の数値計算

分布の時間発展 I

L05-Q1

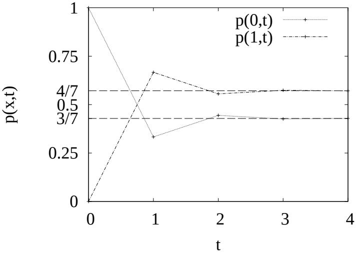
Quiz(マルコフ連鎖の時間発展)

状態空間 $\{0,1\}$ 上のマルコフ連鎖を考える. 転置推移確率行列は

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1. 定常分布をすべて求めよう.
2. 初期分布 $\vec{p}(0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ のとき $\vec{p}(1)$ を求めよう.
3. この初期分布のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう.
4. 初期分布 $\vec{p}(0) = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう.

このマルコフ連鎖では, $t \to +\infty$ で $\boxed{}$


p(0,t)
p(1,t)
p(x,t)
1
0.75
4/7
0.5
3/7
0.25
0
0
1
2
3
4
t

L05-Q2

Quiz(マルコフ連鎖の定常分布)

次の転置推移確率行列を持つ 状態空間 $\{0,1,2\}$ 上のマルコフ連鎖を考えよう.

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

なお, M の固有値固有ベクトルは $\lambda = 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ であることを使ってよい.

1. 定常分布をすべて求めよう.
2. 初期分布 $\vec{p}(0) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう.

典型的なケースでのマルコフ連鎖の時間発展 I

状態空間 $S = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ 上のマルコフ連鎖.
転置推移確率行列 M の固有値 $\lambda_i, \vec{u}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$. 大きさの順でならべて次のようだとする. $\vec{u}_1$ は確率ベクトルにとっておく.

$$1 = \lambda_1 > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_m| \geq 0.$$

$$\text{解}\vec{p}(t) = \vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2\lambda_2^t + a_3\vec{u}_3\lambda_3^t + \cdots .$$

極限分布 $\vec{p}(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} \vec{p}(t) = \vec{u}_1$.

初期分布 $\vec{p}(0)$ によらず,

極限分布が存在するなら, それは必ず定常分布. なぜなら

この場合の観察

- 第 1 固有値は 1. 転置推移確率行列の固有値には, いつでも 1 が含まれることを示したのだった.
  先週の証明
- 第 1 固有ベクトル $\vec{u}_1$ は確率ベクトルにとれた. $\boxed{}$. 実はいつでもとれる.
  ペロン-フロベニウスの定理
- 第 2 以降の固有値の絶対値が 1 より小なので
  $\boxed{}$ 第 2 固有値の絶対値が小さいほど, 極限分布に速く収束する
- 第 2 以降の固有ベクトルは $\boxed{}$

これは典型的な場合で, 特殊な場合はこの限りではない

- 典型的である＝既約 (可約でない) かつ非周期的

マルコフ連鎖での母期待値の計算

定義 $p(x,t) = P(X(t) = x)$ から,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\phi(X(t))] &= \sum_x \phi(x) f(x) = \sum_{x=0}^{m-1} \phi(x) p(x,t) \\
&= \sum_{x=0}^{m-1} \phi(x) (M^t \vec{p}(0))_x \\
&= (\phi(0) \phi(1) \cdots \phi(m-1)) M^t \vec{p}(0)
\end{aligned}$$

母比率もこののりで.

L05-Q3

Quiz(マルコフ連鎖の母期待値の時間発展)

次の転置推移確率行列を持つ, 状態空間 $S=\{x\}=\{0,1\}$ 上のマルコフ連鎖を考えよう.

$$M=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

初期分布を $\vec{p}(0)=\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ とする

1. 母期待値 $\mathrm{E}[(X(t)+1)^2]$ を求めよう.
2. 条件 $X(t)>0$ が成立する母比率を求めよう.

ここまで来たよ

可約なマルコフ連鎖 I

L05-Q4

Quiz(可約なマルコフ連鎖の定常状態)

次の転置推移確率行列を持つ 状態空間 $S = \{0, 1, 2\}$ 上のマルコフ連鎖を考える.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

1. $\vec{p}(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき時間発展 $\vec{p}(t)$ を求めよう.
2. $\vec{p}(0) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき時間発展 $\vec{p}(t)$ を求めよう.
3. 推移図を書こう.

Hint. 固有値 $\lambda = 1$(重解), $\frac{1}{3}$, 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 使用可.

既約 (irreducible) なマルコフ連鎖=可約でないマルコフ連鎖

どの状態からどの状態へも, 確率 > 0 の矢印をたどって到達できるとき, マルコフ連鎖は (推移確率行列は) 既約であるという. 既約でないとき, 可約であるという. 可約なとき, 複数の定常状態が存在する.

周期的なマルコフ連鎖 I

L05-Q5

Quiz(マルコフ連鎖)

状態空間 $S = \{0, 1, 2\}$ 上のマルコフ連鎖を考える. 転置推移確率行列 M は次.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. 定常分布をすべて求めよう.
2. 任意の初期分布は定常分布に近づくか考えよう.
3. 推移図を描こう.

Hint: $\lambda_j = \omega^j = (\frac{1+\sqrt{3}i}{2})^j \quad (j = 0, 1, 2)$ を使ってよい.

周期的な状態

$k > 1$ 回おきにしか自分に戻ってこない状態．周期的な状態があると，絶対値 1 の固有値が複数ある．このとき，極限分布はないことがある．

- 典型的である=既約 (可約でない) かつ非周期的
- 典型的でない=可約または周期的

L05-Q6

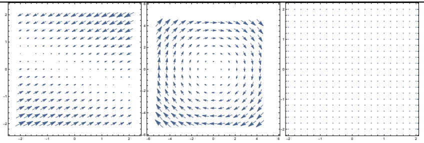
Quiz(周期的なマルコフ連鎖の定常状態)

次の転置推移確率行列をもつ, 状態空間 $S = \{0, 1\}$ 上のマルコフ連鎖を考える.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. マルコフ連鎖の定常分布を求めよう.
2. $\vec{p}(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう. 極限分布はある?
3. $\vec{p}(0) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ のとき $\vec{p}(t)$ を求めよう. 極限分布はある?

常微分方程式系とマルコフ連鎖☆

常微分方程式系　数理モデル II	マルコフ連鎖　計算科学
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p}(t) = A\vec{p}(t)$	$\vec{p}(t) = M\vec{p}(t-1)$ $\vec{p}(t) - \vec{p}(t-1) = (M-E)\vec{p}(t-1)$
$\vec{p}(t) = \mathrm{e}^{At}\vec{p}(0)$ $(\mathrm{e}^{A})^t$	$\vec{p}(t) = M^t\vec{p}(0)$ $(\mathrm{e}^{M-E})^t \simeq (E + (M-E))^t = M^t.$
A の固有値 Λ の実部が 0 $\Lambda = a + bi$	M の固有値 $\lambda = \mathrm{e}^{\Lambda}$ の絶対値が 1 $\lambda = \mathrm{e}^{a+bi}$
	典型的, 周期的, 可約

ここまで来たよ

4 マルコフ連鎖

5 マルコフ連鎖の時間発展
- マルコフ連鎖の時間発展
- 一般の場合のマルコフ連鎖の時間発展
- マルコフ連鎖の時間発展の数値計算

マルコフ連鎖の時間発展の数値計算 I

状態 $x=0,\dots,m-1$ の m 状態のマルコフ連鎖を考える.

分布 $\vec{p}(t)$, $p(x,t)$ $\rightarrow$

```
double p[m]={1.0,0.0,....,0.0}; /*配列. mは整数.*/
/* {p(0,t), p(1,t), p(2,t),...,p(m-1,t)} */
```

転置推移確率行列 $M=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.9 & 0.7 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$

```
double M[][m]= {{0.1,0.3},
                {0.9,0.7}}; /* 2次元配列 */
```

$\{\{p_{00},p_{01}\},$
$\{p_{10},p_{11}\}\}$

行列とベクトルの積

$$\vec{q}=M\vec{p}\rightarrow q_x=\sum_y M_{xy}p_y.$$

```
p[]をp(x,0)で初期化;
pを出力;
for(t){
   pn=M p;/*行列とベクトルの積*/
   p=pn;
   pを出力;
}
```

お知らせ

https://learn.math.ryukoku.ac.jp/moodle

アプリ Moodle Mobile. App-Store, Google Play. 登録する URL は左.

https://download.moodle.org/mobile

- チューター/Math ラウンジ 月火水木昼 1-614
- 2018-05-15 火 臨時教室変更で実習 (マルコフ連鎖)
- 2018-05-29 火 プチテスト (筆記)
- Visual Studio 自宅インストールおすすめ中. 計算科学☆実習のページから.