

オイラー表現とラグランジュ表現・現象のモデリング

樋口さぶろお

龍谷大学工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B L09(2018-06-19 Tue)

最終更新: Time-stamp: "2018-06-23 Sat 08:18 JST hig"

今日の目標

- ゲーム作成や現象の解析で、オイラー/ラグランジュ表現の特徴を活かして使い分けられる
- 現象の問題を確率変数とランダムウォークの問題に書き替えられる



<http://hig3.net>

L08-Q1

Quiz 解答:ランダムウォーカーの到達点の座標の母平均・母分散

- ① $E[X(20)] = E[5 + R(4) + \cdots + R(20)] = 5 + 17 \times (-3) = -46.$
- ② $V[X(7)] = V[5 + R(4) + \cdots + R(20)] = 17 \times 5 = 85.$
- ③ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 85}} e^{-\frac{(x+46)^2}{2 \cdot 85}}.$

L08-Q2

Quiz 解答:AR(1) モデルの例

- ① $\phi = 1$ のとき, $X(1) = 115, X(2) = 107.$
- ② $\phi = 0.9$ のとき, $X(1) = 105, X(2) = 86.5.$
- ③ $\phi = -0.9$ のとき, $X(1) = -75, X(2) = 59.5.$

ここまで来たよ

8 ランダムウォーク, 自己回帰モデル, 時系列解析

9 オイラー表現とラグランジュ表現・現象のモデリング

- オイラー表現とラグランジュ表現
- 確率モデルによるモデリング

実習課題の振り返り:2つのタイプがあった!

- マルコフ連鎖の数値計算

- ▶ markov, ...

- ▶ 母ナントカ: 厳密. 確率の式を 1 回だけ計算. $p(x, t)$ は確率

フォッカー-プランク, マスター方程式, 拡散方程式, 熱方程式

- ▶ オイラー表現: 場所ごとに確率をカウント

- 確率シミュレーション

- ▶ rw, sim, contw, arm, ...

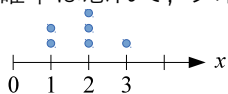
- ▶ 標本ナントカ: 標本サイズだけ乱数で実行を繰り返して, 標本から推定. $X(t)$ は座標

ランジュバン方程式

- ▶ ラグランジュ表現:ウォーカーごとに座標をカウント

ラグランジュ表現

確率は忘れて、ウォーカーが大勢いる状況をラグランジュ表現しよう。



数式的

$x^{(k)}(t)$: ウォーカー番号 k 番の, 時刻 t の座標.

上の状況なら

$$x^{(0)}(t) = 1, x^{(1)}(t) = 2, x^{(2)}(t) = 2, x^{(3)}(t) = 3, x^{(4)}(t) = 1, x^{(5)}(t) = 2.$$

C 的

`x[k]` ウォーカー番号 k 番の座標 (時刻 t とともに, この変数を更新)

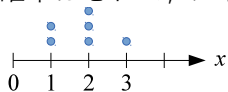
```
int x[6]; /*配列の宣言*/
```

または,

```
int x[]={1,2,2,3,1,2}; /*配列の宣言兼代入*/
```

オイラー表現

確率は忘れて、ウォーカーが大勢いる状況をオイラー表現しよう。



数式的

$P(x, t)$: 時刻 t に、座標 x にいるウォーカーの人数。

上の状況なら

$P(0, t) = 0, P(1, t) = 2, P(2, t) = 3, P(3, t) = 1, P(\text{他}, t) = 0.$

C 的

$P[x]$ 座標 x にいるウォーカーの人数 (時刻 t とともに更新)

```
int P[100]; /*配列の宣言. 100 - 1 = x 座標の上限*/
```

または

```
int P[]={0,2,3,1,0,0,...}; /*配列の宣言兼代入*/
```

マルコフ連鎖の計算で使ってる `double p[]` は「いわば」 $p = P/N$,
 $N = 6$ がウォーカーの合計人数。

L09-Q1

Quiz(ラグランジュ表現とオイラー表現)

(座標が整数値のみをとる離散型の) ランダムウォークを考える.
6羽のペンギンが, 座標 $x = 0, 1, 2, \dots, 9$ の範囲をランダムウォークする.
ある時刻 t に, $x = 1$ に 2羽, $x = 3$ に 3羽, $x = 8$ に 1羽いるとする.

- ① ラグランジュ表現を用いたとき, 配列 $x[]$ のサイズはどれだけ必要か. また, 時刻 t に配列の各要素はどのような値をとるか.
- ② オイラー表現を用いたとき, 配列 $p[]$ のサイズはどれだけ必要か. また, 時刻 t に配列の各要素はどのような値をとるか.

配列のサイズとは, 元の型の変数を何個集めたかという個数. `int x[SIZE];` の `SIZE`.

ラグランジュ表現とオイラー表現によるプログラムの比較

	ラグランジュ表現	オイラー表現
空間	なんでも	有限個の場所
ウォーカーの区別	あり	なし
得意な問		
シューティング ブロック崩し テトリス ランダムウォーク	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

L09-Q2

Quiz(オイラー表現とラグランジュ表現)

次のゲームのオブジェクトのうち、オイラー表現に適したもの(=ラグランジュ表現に適していないもの)を答えよう。

- ① シューティングの自機
- ② シューティングのミサイル
- ③ シューティングの雑魚キャラ
- ④ シューティングのラスボス
- ⑤ ブロック崩しのボール
- ⑥ ブロック崩しのラケット
- ⑦ ブロック崩しのブロック
- ⑧ テトリスの落下前のブロック
- ⑨ テトリスの落下後のブロック

L09-Q3

Quiz(ラグランジュ表現)

ランダムウォークのラグランジュ表現で、時刻 t におけるウォーカーの座標 $X(t)$ の標本が配列 `x[SAMPLESIZE]` に格納されているとする。

```
#define SAMPLESIZE 6
```

```
double x[SAMPLESIZE];
```

- ① 標本平均値 \bar{X} を計算して `double ex;` に代入するプログラム (の一部) を書こう。
- ② $X(t) \leq 5$ の標本比率を計算して `double px;` に代入するプログラム (の一部) を書こう。

両者を同時に計算する 1 個のプログラム (の一部) でもよい。

L09-Q4

Quiz(オイラー表現)

ランダムウォークのオイラー表現, または, マルコフ連鎖の数値解法のプログラムで, 時刻 t においてウォーカーの座標が $X(t) = x$ である確率 $p(x, t)$ が, すでに計算され, 配列 $p[x]$ に格納されているとする. ただし, $x = 0, 1, \dots, 19$.

```
#define XMAX 20  
double p[XMAX];
```

- ① 母平均値 $E[X(t)]$ を計算して `double ex;` に代入するプログラム (の一部) を書こう.
- ② 母比率 $P(X(t) \leq 5)$ を計算して `double px;` に代入するプログラム (の一部) を書こう.

両者を同時に計算する 1 個のプログラム (の一部) でもよい.

ここまで来たよ

- 8 ランダムウォーク, 自己回帰モデル, 時系列解析
- 9 **オイラー表現とラグランジュ表現・現象のモデリング**
 - オイラー表現とラグランジュ表現
 - 確率モデルによるモデリング

ラグランジュ表現での有限空間の離散/連続座標ランダムウォーク

- 離散座標のとき, 整数全体 $x \in \mathbb{Z}$
- 連続座標のとき, 実数全体 $x \in \mathbb{R}$

のランダムウォークを考えていた. 有限空間

- 離散座標のとき, 整数 $x = 0, 1, 2, \dots, m - 1$
- 連続座標のとき, 実数の区間 $x \in [0, L]$

に制限して考えることもできる. → 境界条件

$x = 0$ の境界条件を考える. $X(t - 1) + R(t) \leq 0$ となったときの処理.

吸収壁 $X(t) = \square$ そのウォーカーはそれ以上動かさない.

反射壁 $X(t) = \square$.

周期壁 $X(t) = \square$.

応用:ギャンブラー破産問題とランダムウォーク

10万円を元手にギャンブルする. 毎回1万円をかける. 0万円から2万円が, 同様に確からしい確率で返ってくる. ギャンブル100回のうちに破産する確率は?(20万円に到達する確率は?)

モデル化

ランダムウォークの言葉で書くと?

応用:2次元ランダムウォークとパターン形成 DLA モデル

[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lichtenberg_figure_in_block_of_Plexiglas.jpg)

[Lichtenberg_figure_in_block_of_Plexiglas.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lichtenberg_figure_in_block_of_Plexiglas.jpg)

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:DLA_Cluster.JPG

2次元ランダムウォーク

1次元ランダムウォーク

```
1   x=0;
2   for(t){
3       x+=getrandom(getuniform());
4   }
```

離散座標の場合に `getrandom` をばらして書くと

```
1   x=0;
2   for(t){
3       z=getuniform(); /*[0,1)一様乱数. y座標と区別*/
4       if(z<0.5){
5           x+=1;
6       } else {
7           x-=1;
8       }
9   }
```


2次元ランダムウォーク

- 1次元ランダムウォーク x 軸上をランダムに移動 $X(t)$
 2次元ランダムウォーク xy 平面上をランダムに移動 $(X(t), Y(t))$

離散座標

```

1   x=0;y=0;
2   for(t){
3       z=getuniform();
4       if(z<0.25){
5           x+=1;
6       } else if(z<0.5)
7           x-=1;
8       } else if(z<0.75)
9           y+=1;
10      } else {
11          y-=1;
12      }
13  }
```

連続座標. 移動距離もランダムにしてもいい.

```

1   x=0.0;y=0.0;
2   for(t){
3       z=getuniform();
4       x+=cos(2*M_PI*z);
5       y+=sin(2*M_PI*z);
6   }
```

DLA=Diffusion Limit Aggregation 拡散律速凝集のルール

- 原点に「枝の種」=吸収壁を置く
- 粒子をどこかに置いてランダムウォーク. 粒子が枝に接触したらウォーク終了 (吸収壁)
粒子は枝に固着する \rightsquigarrow 吸収壁が成長
- 粒子をどこかに再度おいてランダムウォーク



1次元と2次元の中間の図形

応用数理 A

P. Nathan <https://www.youtube.com/watch?v=uBy3Uouy76Q>

S. Higuchi <https://www.youtube.com/watch?v=Y6F86ryRTGs>



	テトリス	DLA
オイラー表現	積み上がるブロック	枝
ラグランジュ表現	落ち中のブロック 横ランダム, 縦等速直線運動 4 ブロック, 回転あり	ランダムウォーカー 縦横ランダム 1 ブロック, 回転なし

応用:B 湖の水位のランダムな増減 I

L09-Q5

Quiz(確率シミュレーションと中心極限定理)

B湖の毎日の水位の変化 R は、毎日独立に、 -1 cm 以上 2 cm 以下の範囲でランダムに定まり、どの値も同様に確からしい。0日に水位は 100 cm だった。

- ① 水位の決まるルールと 30 日の水位が 120 cm 以上 125 cm 未満である確率をランダムウォークの言葉で書こう
- ② 30 日の水位はどんな分布?
- ③ 30 日の水位が 120 cm 以上 125 cm 未満である確率を求めよう

ただし、標準正規分布の累積分布関数 $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-u^2/2} du$ を使って答えてよい。計算機でシミュレーションして答えてもよい。

応用:B 湖の水位のランダムな増減 II

二項分布の正規近似 高校 数学 B の進化形

次のうちどれは式で求められる? どれは確率シミュレーションで求められる?

- ① 10日目から20日目までの水位の増分の母平均値
- ② 0日から30日目までずっと120cmを越えない母比率
- ③ (15日目の水位)³の母平均値
- ④ 120cmを越えない日数の母平均値
- ⑤ 30日間の最大水位の母平均値

「何でも」確率シミュレーションで推定できる

お知らせ

提出場所

<https://learn.math.ryukoku.ac.jp/moodle>



モバイルアプリ

<https://download.moodle.org/mobile>



通信量を抑えるスキャナアプリ CamScanner

<https://www.camscanner.com/>



- チューター/Math ラウンジ 月火水木昼 1-614
- 2018-06-20 水 数理情報セミナー履修説明会
- 2018-06-22 金 初夏のプチテスト (プログラミング実技)
- 2018-06-26 火 実習室で, 新チームで
- 2018-07-06 金 プレゼンテーション (5 ピーナッツ)
- 2018-07-20 金 プレゼンテーション (15 ピーナッツ)
- 2018-07-24 火 補講なしの予定
- 2018-07-27 金 ふつうの講義/演習
- 2018-07-31 火 ファイナルトライアル (筆記)
- 2018-08-03 金 演習の期末試験はなし
- Visual Studio 自宅インストールおすすめ中. 計算科学☆実習のページから.