連続型確率変数の関数の確率密度関数と母期待値と推定

樋口さぶろお

龍谷大学理工学部数理情報学科

計算科学☆実習 B L10(2018-07-03 Tue)

最終更新: Time-stamp: "2018-07-04 Wed 09:42 JST hig"

今日の目標

- 連続型確率変数の関数として定まる確率変数の母期待値を求められる
- 連続型確率変数の関数として定まる確率変数の確率密度関数を求められる

http://hig3.net

L09-Q1
Quiz 解答:ラグランジュ表現とオイラー表現

1. 6 羽なのでサイズは 6.
   各要素は, `x[]={1,1,3,3,3,8};` (順序はこうである必要はない. 自由にペンギン番号をつけてよい)
2. 座標が $x = 0, 1, 2, \ldots, 9$ の計 10 か所なので, サイズは 10.
   各要素は `u[]={0,2,0,3,0,0,0,0,1,0};` (順序はこうである必要がある)

L09-Q3
Quiz 解答:ラグランジュ表現

```
int  sum=0,count=0;
for(k=0;k<SAMPLESIZE;k++){
  sum+=x[k];
  if( x[k]<=5)  count++;
}
ex=(double)sum/SAMPLESIZE;
px=(double)count/SAMPLESIZE;
```

L09-Q4

Quiz 解答:オイラー表現

```
double  ex=0.0,  px=0.0;
for(x=0;x<XMAX;x++){
  ex+=p[x]*x;
  if(x<=5)  px+=p[x];
}
```

L09-Q5

Quiz 解答:確率シミュレーションと中心極限定理

1. t 日の水位を連続型確率変数 $X(t)$ とすると, 独立同分布にしたがう連続型確率変数 $R(t) \sim \mathrm{U}(-1, 2)$ により,

$$X(t) = X(t-1) + R(t), \quad X(0) = 100$$

確率 $P(120 \leq X(30) < 125)$ を求めたい.

2. $\mathrm{E}[R] = \frac{1}{2}$. よって, $\mathrm{E}[X(30)] = \mathrm{E}[X(0)] + 30 \cdot \frac{1}{2} = 115$.
$\mathrm{V}[R] = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$. 各 $R(t)$ は独立なので, $\mathrm{V}[X(30)] = \frac{3}{4} \cdot 30 = \frac{90}{4}$.
3. $X = X(30)$ のしたがう確率分布の確率密度関数は,$T = 30$ が十分に大きいと考えると, 中心極限定理より $X \sim \mathrm{N}(115, \frac{90}{4})$.

$$f(x; 115, \tfrac{90}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \frac{90}{4}}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-115)^2}{2 \cdot (90/4)}}.$$

変数変換 $Z = \frac{X-115}{\sqrt{\frac{90}{4}}}$ により, $Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$. よって, 求める確率は,

$$P = \int_{120}^{125} f(x; 115, \tfrac{90}{4})\, \mathrm{d}x = \int_{5/\sqrt{90/4}}^{10/\sqrt{90/4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-z^2/2}\, \mathrm{d}z.$$

正規分布表より,

$$P = \Phi(\frac{10}{\sqrt{90/4}}) - \Phi(\frac{5}{\sqrt{90/4}}) = Q(1.05) - Q(2.11) = 0.1469 - 0.0174$$

ここまで来たよ

確率変数の関数 I

西川確率統計例題 3.4(p.74)

L10-Q1

Quiz(確率変数の変換)

一様分布 $\mathrm{U}(0,1)$ に従う連続型確率変数 Y と, $R = g(Y) = 2\sqrt{Y}$ で定まる連続型確率変数 R を考える.

1. $\mathrm{E}[R], \mathrm{V}[R]$ を求めよう.
2. 母比率 (確率) $P(0.2 < R < 0.8)$ を求めよう.
3. 母比率 (確率) $F_{\mathrm{R}}(r) = P(R < r)$ を求めよう.
4. R の確率密度関数 $f_{\mathrm{R}}(r)$ を求めよう.

R の乱数生成は簡単.

```
double getrandom(double y){
  double r;
  r=2*sqrt(y);
  return r;
}
r=getrandom(getuniform());
```

標本

y	$r = 2\sqrt{y}$
0.00	0.00
0.49	1.40
⋮	⋮
0.81	1..80

復習 (累積分布関数)

西川確率統計定義 3.7:分布関数

確率密度関数　累積分布関数

$$f(x) \overset{\text{積分}}{\rightarrow} F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\mathrm{d}s = P(X < x)$$

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x) \overset{\text{微分}}{\leftarrow} F(x)$$

定義 (と同値な性質) 西川確率統計 1.4.2

連続型確率変数 Y に対して, $R = g(Y)$ も連続型確率変数で, R の母期待値や確率は Y の母期待値や確率から定まる. (簡単のため g は単調増加)

$$\mathrm{E}[\phi(R)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathrm{R}}(r)\phi(r)\,\mathrm{d}r = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathrm{Y}}(y)\phi(g(y))\,\mathrm{d}y = \mathrm{E}[\phi(g(Y))].$$

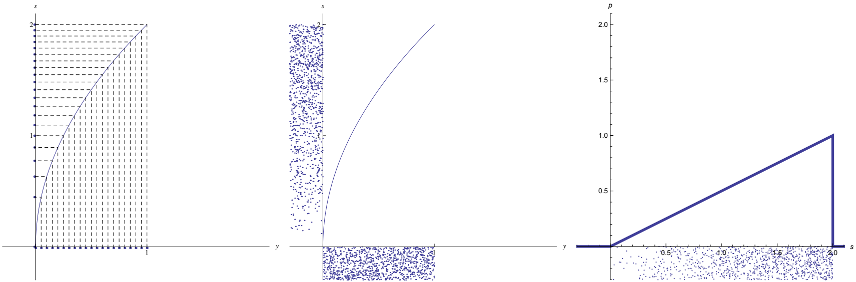
特に

$$P(g(a) < R < g(b)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f_{\mathrm{R}}(r)\,\mathrm{d}r = \int_a^b f_{\mathrm{Y}}(y)\,\mathrm{d}y = P(a < Y < b).$$

これまで $\mathrm{E}[aX+b]$ とか考えてたのは $Y = g(X) = aX + b$ を考えてたことに相当. 西川確率統計定理 2.8

左辺をきかれたときの方針

- 右辺に直して計算する.
- R の確率密度関数 $f_{\mathrm{R}}(r)$ を求めてから, 左辺で計算する.


s
2
1
y
1
s
2
1
y
1
p
2.0
1.5
1.0
0.5
0.5
1.0
1.5
2.0
s

確率密度関数の変換のおぼえ方

$r = g(q)$ を単調増加な関数とするとき,
$f_Q(q)\,\mathrm{d}q$ は変数変換しても不変:　$f_R(r)\,\mathrm{d}r = f_Q(q)\,\mathrm{d}q$

$$f_R(r) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}(q)} f_Q(q)$$

西川確率統計注意 3.8

逆関数法

うまい $r = g(y)$ を使うと, 一様分布にしたがう Y から, ほしい確率密度関数 $f_R(r)$ にしたがう R を生成できる. g を求める方法の詳細略.

L10-Q2

Quiz(確率変数の変換)

一様分布 $\mathrm{U}(0,1)$ に従う連続型確率変数 Y と, $R = g(Y) = \mathrm{e}^{Y}$ で定まる連続型確率変数 R を考える.

1. $\mathrm{E}[R], \mathrm{V}[R]$ を求めよう.
2. 母比率 (確率) $F_{\mathrm{R}}(r) = P(R < r)$ を求めよう.
3. R の確率密度関数 $f_{\mathrm{R}}(r)$ を求めよう.

この R に対応する擬似乱数を `double getuniform()` を使って生成するには?

ここまで来たよ

9 オイラー表現とラグランジュ表現・現象のモデリング

10 連続型確率変数の関数の確率密度関数と母期待値と推定
- 確率変数の関数
- 確率変数の関数の応用
- 標準正規分布にしたがう乱数の生成

L10-Q3

Quiz(確率変数の変換)

あるクッキーマシンの作る正方形のクッキーの面積 (生地の量)Q は, 次の確率密度関数にしたがう (単位省略).

$$f_{\mathrm{Q}}(q) = \begin{cases} \frac{1}{36} & (64 \leq q < 100) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

クッキーの一辺の長さは $R = g(Q) = \sqrt{Q}$ で与えられる (単位省略).

1. Q の母平均値と母分散を求めよう.
2. 確率 $P(Q > 82)$ を求めよう.
3. $f_{\mathrm{R}}(r)$ を求めよう.
4. R の母平均値と母分散を求めよう (2 つの方法で).
5. 確率 $P(R > 9)$ を求めよう (2 つの方法で).

クッキーの一辺 R に相当する擬似乱数を生成するには?

L10-Q4

Quiz(確率変数の変換)

ある氷製造マシンは, 一辺の長さが Q の立方体の氷を製造する. Q は確率密度関数

$$f_{\mathrm{Q}}(q) = \begin{cases} \frac{1}{6} & (10 \leq q < 16) \\ 0 & (\text{他}) \end{cases}$$

にしたがう連続型確率変数である.
立方体の氷の体積 $R = g(Q) = Q^3$ もまた, 連続型確率変数である.
$16^2 = 256, 16^3 = 4096, 16^4 = 65536$ だが, 整数の四則演算やべき乗や分数は計算や約分や簡単化をせずにそのまま残してもよい.

1. 確率変数 R の確率密度関数 $f_{\mathrm{R}}(r)$ を求めよう.
2. 体積 R の母期待値を求めよう.
3. 体積 R が 2000 未満である確率を求めよう.

立方体の体積 R に相当する擬似乱数を生成するには?

ここまで来たよ

9 オイラー表現とラグランジュ表現・現象のモデリング

10 連続型確率変数の関数の確率密度関数と母期待値と推定
- 確率変数の関数
- 確率変数の関数の応用
- 標準正規分布にしたがう乱数の生成

標準正規分布にしたがう乱数の生成

$R \sim \mathrm{U}(0,1)$ から, $X = g(R) \sim \mathrm{N}(0,1^2)$ となるような g があるといい.
けどそんなうまい話はない. 正規分布の確率密度関数が積分できないから.
高レベル言語 Python, R などでは, 正規分布にしたがう乱数を生成する, ハイテクでブラックボックスな関数があるのでそれを利用.
サンプルサイズ 1000 の標準正規分布にしたがう標本.

サンプルサイズ 1000 の標準正規分布にしたがう標本

```
z<-rnorm(1000) # in R
```

サンプルサイズ 1000 の標準正規分布にしたがう標本

```
import numpy # in Python
z=numpy.random.rand(1000)
```

サンプルサイズ 1 の標準正規分布にしたがう標本

```
norm.inv(rand(),0,1) // in Excel
```

サンプルサイズ 2 の標準正規分布にしたがう標本

```
/* Box-Muller 法 */
r=getuniform(); /* C*/
theta=getuniform();
z1=sqrt(-2*ln(r))*cos(2*M_PI*theta);
z2=sqrt(-2*ln(r))*sin(2*M_PI*theta);
```

サンプルサイズ 1 の標準正規分布にしたがう標本

```
z=0.0; /*C*/
for(i=0;i<12;i++){
   z+=(getuniform()-0.5); /*右辺 U(0,1/12) */
}
/* 12が十分大きいと考え中心極限定理を不正確に適用 */
```

L10-Q5

Quiz(正規分布とカイ二乗分布の変換)

標準正規分布にしたがう連続型確率変数 $Z \sim \mathrm{N}(0, 1^2)$ と,
$X = g(Z) = Z^2$ で定まる連続型確率変数 X を考える.

1. 標準正規分布の数表または t 分布の数表と電卓を用いて, 確率 $P(X < x_0) = 0.95$ となる x_0 を求めよう.
2. カイ二乗分布の数表を用いて, 確率 $P(X < x_0) = 0.95$ となる x_0 を求めよう.
3. 標準正規分布の性質を用いて, $\mathrm{E}[X]$ を求めよう.
4. 標準正規分布の確率密度関数から, X の確率密度関数を求めよう.

お知らせ

提出場所
https://learn.math.ryukoku.ac.jp/moodle

モバイルアプリ
https://download.moodle.org/mobile

通信量を抑えるスキャナアプリ CamScanner
https://www.camscanner.com/

- チューター/Math ラウンジ 月火水木昼 1-614
- 2018-07-06 金 プレゼンテーション 1-542 集合 (5 ピーナッツ)
- 2018-07-10 火 実習的. 1-542
- 2018-07-17 火 ふつうの講義/演習 7-001
- 2018-07-20 金 プレゼンテーション (15 ピーナッツ)
- 2018-07-24 火 補講なしの予定
- 2018-07-27 金 ふつうの講義/演習
- 2018-07-31 火 ファイナルトライアル (筆記)
- 2018-08-03 金 演習の期末試験はなし
- Visual Studio 自宅インストールおすすめ中. 計算科学☆実習のページから.