電磁気学 II[1] 期末試験略解

龍谷大学理工学部数理情報学科　　2001 年 7 月 31 日　樋口さぶろお[2]

1　アンペールの法則

1. 磁束密度は円柱の中心について回転対称で, 右ねじの向きから定まる接線方向. したがって, あとは大きさを求めればよい. 磁束密度の大きさを $B(r)$ とする. 円柱の底面に垂直で, 中心を共有する半径 r の円を積分 C として, アンペールの法則を用いる.

   $0 < r < R$ のとき, $B(r) \times 2\pi r = \mu_0 \pi r^2 i$. よって, $B(r) = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{1}{r}$.

   $R < r$ のとき, $B(r) \times 2\pi r = \mu_0 \pi R^2 i$. よって, $B(r) = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{r}$.

2. 図 1 の積分路 C をとると, 貫く電流は, $n\ell I$. 中心での磁束密度はコイルに平行で, 大きさを B とすると,

$$\int_{\mathrm{C}_1} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}) ds = B\ell. \tag{1}$$

   C_2, C_4 上では, $\mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}) = 0$ より,

$$\int_{\mathrm{C}_2} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}) ds = \int_{\mathrm{C}_4} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}) ds = 0. \tag{2}$$

   また, $r \to \infty$ とすると, C_3 上の磁束密度は任意に小さくできるので,

$$\int_{\mathrm{C}_3} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}) ds \tag{3}$$

   アンペールの法則より,

$$\int_{\mathrm{C}_1+\mathrm{C}_2+\mathrm{C}_3+\mathrm{C}_4} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{r}) ds = B\ell = \mu_0 n\ell I \tag{4}$$

   すなわち $B = \mu_0 nI$.

2　電磁誘導

1. 磁束密度は導線のまわりに回転対称で, 導線から距離 r の点で, 向きは右ねじの法則に従い, 大きさは, $B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$. したがって, r の位置にあるコイルを貫く磁束は,

$$\Phi(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} S. \tag{5}$$

[1] http://sparrow.math.ryukoku.ac.jp/~hig/elemag2/

[2] mailto:hig@math.ryukoku.ac.jp,　http://www.math.ryukoku.ac.jp/~hig/, へや 1-508, でんわ 077-543-7501

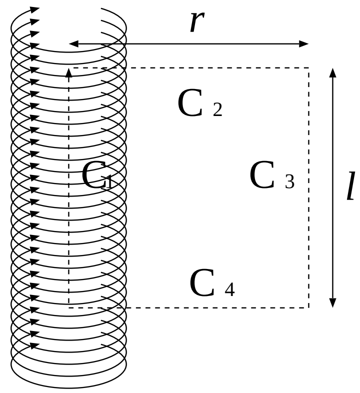

図 1:

コイルを, $r = vt + r_0$ にしたがって遠ざけると, 生じる起電力は,

$$\phi_{\mathrm{em}}(r_0) = - \left. \frac{\mathrm{d}\Phi(vt + r_0)}{\mathrm{d}t} \right|_{t=0} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{ISv}{r_0^2}. \tag{6}$$

よって, $\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{ISv}{r^2}$. 起電力の向きは, 電流が, 直線導線のつくる磁束密度を強める向き.

2. 時刻 t に ABQP を貫く磁束 $\Phi(t)$ は,

$$\Phi(t) = \Phi(0) + avB. \tag{7}$$

ファラデーの法則より, 誘導起電力は,

$$\phi(t) = -\frac{d\Phi}{dt}(t) = -avB. \tag{8}$$

向きは B から A に向かう向き.

電流は, B から A に向かう向きで, 大きさは, オームの法則より $-avB/R$.

3　非定常回路

1. $\frac{dQ}{dt}(t) = I(t)$.
2. $L\frac{d^2Q}{dt^2}(t) + R\frac{dQ}{dt}(t) + \frac{1}{C}Q(t) = V(t)$.
3. $V(t) = 0$ のときの一般解は,

$$\lambda_{\pm} := \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L} \tag{9}$$

を用いて,

$$Q(t) = A_+ \mathrm{e}^{\lambda_+ t} + A_- \mathrm{e}^{\lambda_- t}, \tag{10}$$
$$I(t) = A_- \lambda_+ \mathrm{e}^{\lambda_+ t} + A_- \lambda_- \mathrm{e}^{\lambda_- t} \tag{11}$$

と書ける. 初期条件は, $Q(0)=Q_0, I(0)=\dot{Q}(0)=0$ より,

$$A_\pm = \frac{Q_0}{2}\left(1 \pm \frac{R}{\sqrt{R^2-4L/C}}\right) \tag{12}$$

4. 回路の複素インピーダンスは $Z=R\omega+i(L\omega-\frac{1}{\omega C})$. よって電流 $I(t)$ は,

$$I(t) = \mathrm{Re}\,\frac{V_0 e^{i\omega t}}{Z} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\left(R\cos\omega t + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\sin\omega t\right). \tag{13}$$

$\dot{Q}(t)=I(t)$ より,

$$Q(t) = Q_1 + \frac{V_0/\omega}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\left(+R\sin\omega t - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\cos\omega t\right). \tag{14}$$

Q_1 は定数だが, 2. の微分方程式の解であるためには $Q_1=0$.

4　中間試験範囲からの出題またはマクスウェルの方程式

4.1　マクスウェル方程式

略

4.2　ビオ-サバールの法則

1. 回路 C を流れる電流の大きさを I, 位置 $\mathbf{r}'$ での電流の向きの単位ベクトルを $\mathbf{t}(\mathbf{r}')$ とするとき, 点 $\mathbf{r}$ での磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ は,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathrm{C}} \frac{I\mathbf{t}(\mathbf{r}')\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}ds'. \tag{15}$$

2. 上の式を使って, この一辺が $(0,0,0)$ につくる磁束密度 $\mathbf{B}_0$ は,

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-R}^{+R}\frac{I\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)\times\left(\begin{smallmatrix}-x'\\R\\0\end{smallmatrix}\right)}{(x'^2+R^2)^{3/2}}dx' = \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)\int_{-R}^{+R}\frac{dx'}{(x'^2+R^2)^{3/2}} \tag{16}$$

積分は, $x'=R\tan\theta$ と変数変換すると,

$$\int_{-\pi/4}^{+\pi/4}\frac{\frac{R}{\cos^2\theta}d\theta}{\frac{R^3}{\cos^3\theta}} = \int_{-\pi/4}^{+\pi/4}\cos\theta d\theta = \frac{\sqrt{2}}{R^2} \tag{17}$$

よって, $\mathbf{B}_0$ は, z 軸の正の向きで大きさ $\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\sqrt{2}}{R}$.

3. 各辺から同じ寄与があるので, 磁束密度は, z 軸の正の向きで大きさ $\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{4\sqrt{2}}{R}$.